TANIA-LUMINIȚA COSTACHE

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Culegere de probleme

Editura
PR[illegible]

ANALIZĂ MATEMATICĂ
Culegere de probleme

TANIA – LUMINIŢA COSTACHE

Editura PRINTECH
2009

Prefaţă

Lucrarea este rezultatul seminariilor de analiză matematică ţinute de autoare studenţilor anilor întâi ai Facultăţilor de Automatică şi Calculatoare, Electronică şi Telecomunicaţii şi Ştiinţe Aplicate din Universitatea Politehnică Bucureşti.

Cartea este structurată în treisprezece capitole, conţinând o secţiune teoretică cu principalele noţiuni şi rezultate necesare rezolvării exerciţiilor, o parte de probleme rezolvate care acoperă programa de analiză şi probleme propuse studenţilor pentru o fixare mai bună a cunoştinţelor predate, precum şi pentru înţelegerea altor cursuri de specialitate.

Pentru aprofundarea conceptelor fundamentale ale analizei sunt necesare o pregătire teoretică suplimentară şi o participare activă în cadrul seminariilor şi cursurilor.

Mult succes!

Cuprins

Capitolul 1

Capitolul 1

Serii de numere reale

1.1 Definiţie şi proprietăţi generale

Definiţia 1.1. Fie $(u_n)_n$ un şir de numere reale şi fie $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ şirul sumelor parţiale asociat. Seria $\sum_n u_n$ se numeşte **convergentă** dacă şirul s_n este şir convergent; limita acestui şir se numeşte **suma seriei**; în caz contrar seria se numeşte **divergentă** (adică dacă şirul sumelor parţiale nu are limită sau limita sa este $+\infty$ sau $-\infty$). Dacă şirul s_n nu are limită nici finită , nici infinită vom spune că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este **oscilantă** .

Proprietăţi generale

1. Dacă într-o serie se schimbă ordinea unui număr finit de termeni se obţine o nouă serie de aceeaşi natură ; dacă seria iniţială are sumă atunci seria obţinută prin această schimbare are aceeaşi sumă .

2. Dacă la o serie se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni se obţine o nouă serie de aceeaşi natură , dar cu altă sumă , în cazul în care seria iniţială este convergentă .

3. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă , atunci pentru orice şir $(k_n)_n$ crescător, divergent, de numere naturale, seria

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{k_1}) + (u_{k_1+1} + \ldots + u_{k_2}) + \ldots + (u_{k_n+1} + \ldots + u_{k_{n+1}}) + \ldots$$

este de asemenea convergentă şi are aceeaşi sumă ; dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă , dar are sumă , atunci şi seria de mai sus este diver-

gentă şi are aceeaşi sumă . Dacă există un şir $(k_n)_n$ astfel încât seria de mai sus să fie divergentă , atunci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă .

4. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă , şirul sumelor parţiale este mărginit.

5. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie convergentă şi $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$ seria convergentă obţinută prin înlăturarea primilor p termeni. Suma seriei $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$se notează cu R_p şi se numeşte **restul de ordin n** al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Cu ajutorul acestei noţiuni se poate enunţa proprietatea:**resturile unei serii convergente formează un şir convergent către zero.**

6. Seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$, unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sunt de aceeaşi natură .

7. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă , şirul $(u_n)_n$ al termenilor săi este convergent către zero.Reciproca nu este adevărată :$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vom vedea că e divergentă , dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
   Această proprietate numită **condiţia necesară de convergenţă** se mai poate enunţa în următoarea formulare echivalentă , utilă în aplicaţii:

8. Dacă şirul termenilor unei serii nu este convergent către zero,seria este divergentă .

Exemplul 1.1. **Seria geometrică** Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $q \in \mathbb{R}$ numit **raţie** şi fie seria geometrică $\sum_{n\geq 0} aq^n$.

Suma parţială de rang n a seriei este

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \begin{cases} a\frac{1-q^n}{1-q}, & \text{pentru } q \neq 1 \\ na, & \text{pentru } q = 1 \end{cases}$$

Dacă $|q| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$, deci seria geometrică este convergentă în acest caz şi are suma $\frac{a}{1-q}$.

Dacă $|q| \geq 1$, atunci se observă imediat că şirul termenilor seriei nu converge către 0, deci,conform proprietăţii 8., seria geometrică este divergentă în acest caz.

1.2 Serii cu termeni pozitivi

Proprietăţi:

1. Şirul sumelor parţiale ale unei serii cu termeni pozitivi este strict crescător.
2. O serie cu termeni pozitivi are totdeauna sumă (finită sau nu).
3. O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este mărginit.
4. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este o serie cu termeni pozitivi , atunci ea are aceeaşi natură cu seria

   $$(u_1+u_2+\ldots+u_{k_1})+(u_{k_1+1}+\ldots+u_{k_2})+\ldots+(u_{k_n+1}+\ldots+u_{k_{n+1}})+\ldots$$

   unde $(k_n)_n$ este un şir crescător divergent de numere naturale.

Pentru stabilirea naturii unei serii cu termeni pozitivi se folosesc următoarele criterii:

1. **Primul criteriu al comparaţiei** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serii cu termeni pozitivi.Presupunem că $u_n \leq v_n$. Atunci:

   1) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă .

   2) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă

2. **Al doilea criteriu al comparaţiei** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serii cu termeni pozitivi.Presupunem că $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Atunci:

   1) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă .

   2) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă

3. **Al treilea criteriu al comparaţiei** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serii cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

   1) Dacă $0 < l < \infty$, atunci cele două serii sunt de aceeaşi natură .

   2) Dacă $l = 0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă .

   3) Dacă $l = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă .

4. **Criteriul rădăcinii(al lui Cauchy)** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Atunci:

   1) Dacă $l < 1$, seria este convergentă .

   2) Dacă $l > 1$, seria este divergentă .

5. **Criteriul raportului(al lui D'Alembert)** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Atunci:

   1) Dacă $l < 1$, seria este convergentă .

   2) Dacă $l > 1$, seria este divergentă .

6. **Criteriul lui Raabe-Duhamel** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l$. Atunci:

   1) Dacă $l > 1$, seria este convergentă .

   2) Dacă $l < 1$, seria este divergentă .

7. **Criteriul lui Kummer** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

   1) Dacă există un şir $(a_n)_n$ de numere pozitive astfel încât şirul cu termenul general $\lambda_n = a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$ să aibă limită strict pozitivă , atunci seria este convergentă .

   2) Dacă există un şir $(a_n)_n$ de numere strict pozitive astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ să fie divergentă , iar şirul $(\lambda_n)_n$ să aibă limită strict negativă

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă .

8. **Criteriul de condensare al lui Cauchy** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi şi descrescători, iar $(a_n)_n$ un şir crescător divergent de numere naturale astfel încât şirul de termen general $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}$ să fie mărginit. Să se arate că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)u_{a_n}$ sunt de aceeaşi natură.

9. **Criteriul logaritmic** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi şi să presupunem că există $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = l$.

   1) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă .

   2) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă .

10. **Criteriul lui Gauss** Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât raportul $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ se poate pune sub forma $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$, unde $\alpha > 0$, iar $(\theta_n)_n$ este un şir mărginit, atunci ea este convergentă , dacă $\lambda > 1$ sau dacă $\lambda = 1$, $\mu > 1$ şi divergentă dacă $\lambda < 1$ sau dacă $\lambda = 1, \mu \leq 1$.

11. **Criteriul integral** Fie $f\colon (0,\infty) \to [0,\infty)$ o funcţie descrescătoare şi fie şirul $a_n = \int_1^n f(t)dt$. Atunci seria $\sum_n f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(a_n)_n$ este convergent.

Exemplul 1.2. Seria armonică generalizată Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Vom stabili natura ei.

Dacă $\alpha \leq 0$, atunci termenul general al seriei nu converge către 0, deci seria este divergentă .

Dacă $\alpha > 0$, termenii acestei serii formează un şir descrescător de numere pozitive, deci putem aplica criteriul de condensare. Luând în acest criteriu $a_n = 2^n$, deducem că pentru $\alpha > 0$ seria dată este de aceeaşi natură cu seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}}$. Cum ultima serie are raţia $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$, rezultă că ea este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Prin urmare, seria armonică generalizată este convergentă dacă $\alpha > 1$ şi divergentă dacă $\alpha \leq 1$.

Pentru $\alpha = 1$ seria se numeşte **serie armonică** .

1.3 Serii alternate

Definiţia 1.2. Se numeşte serie **alternată** o serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ pentru care produsul $u_n u_{n+1} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Criteriul lui Leibniz Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ o serie alternată . Dacă şirul $(u_n)_n$ este descrescător şi converge către 0, atunci seria este convergentă .

1.4 Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

Definiţia 1.3. O serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ se numeşte **absolut convergentă** dacă seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă .

Seriile absolut convergente au următoarele proprietăţi:

1. Orice serie absolut convergentă este convergentă .

2. Prin orice permutare a termenilor unei serii absolut convergente se obţine tot o serie absolut convergentă cu aceeaşi sumă .

Studiul convergenţei absolute se face cu ajutorul criteriilor de la seriile cu termeni pozitivi.

Definiţia 1.4. Se numeşte serie **semiconvergentă** , orice serie convergentă pentru care seria modulelor este divergentă .

Pentru a stabili dacă o serie cu termeni oarecare este convergentă se poate cerceta, în baza proprietăţii 1., dacă ea este absolut convergentă sau se aplică următoarele criterii:

1. **Criteriul general al lui Cauchy** O serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq N(\varepsilon)$ să avem $|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon, \forall p \geq 1$.

2. **Criteriul lui Abel** Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ se poate scrie sub forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$

în care şirul $(\alpha_n)_n$ este monoton şi mărginit, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă , atunci această serie este convergentă .

3. **Criteriul lui Dirichlet** Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ se poate scrie sub forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ în care $(\alpha_n)_n$ este un şir monoton tinzând către zero, iar şirul de termen general $V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ este mărginit, atunci aceasta este convergentă .

1.5 Operaţii cu serii

Definiţia 1.5. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ serii.Seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$, unde $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1$ se numesc **suma, diferenţa** şi **produsul seriilor** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Proprietăţi:

1. Suma şi diferenţa a două serii convergente este convergentă . Dacă s, σ, S, s' sunt sumele seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$, atunci $S = s + \sigma, s' = s - \sigma$.

2. **Teorema lui Abel** Dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ sunt convergente şi dacă U, V, W sunt sumele lor,atunci $U \cdot V = W$.

3. **Teorema lui Mertens** Dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt convergente şi cel puţin una dintre ele este absolut convergentă , atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ este convergentă şi avem $U \cdot V = W$.

4. **Teorema lui Cauchy** Dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ sunt absolut convergente, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ este absolut convergentă .

1.6 Aproximarea sumelor seriilor convergente

Evident, suma unei serii convergente se poate aproxima cu termenii şirului sumelor parţiale. Dăm mai jos două rezultate în acest sens.

Aproximarea sumelor seriilor cu termeni pozitivi

Fie $u_n \geq 0$ şi fie $k \geq 0$ astfel încât $\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1, \forall n \in N$. Dacă S este suma seriei convergente $\sum_{n \in N} u_n$, iar $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ este suma primilor $n+1$ termeni, atunci:

$$|S - s_n| < \frac{k}{1-k} u_n.$$

Aproximarea sumelor seriilor alternate

Fie $\sum_{n \in N} (-1)^n u_n$ o serie alternată convergentă , şi fie S suma sa. Dacă $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ este suma primilor $n+1$ termeni, atunci

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}.$$

1.7 Probleme rezolvate

1. Dacă seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}|$, unde $x_n \in \mathbb{R}$, este convergentă , atunci $(x_n)_{n \geq 1}$ e convergent.Reciproca nu e adevărată . Daţi un contraexemplu.

Soluţie. Fie $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} |x_k - x_{k-1}|$

Cum $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}|$ este convergentă rezultă că $(S_n)_n$ e convergent, deci e şir Cauchy, adică $|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - -x_{n+p-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| = S_{n+p} - S_n, \forall n \geq 2, \forall p \geq 1 \Longrightarrow (x_n)_n$ e şir Cauchy, deci $(x_n)_n$ e şir convergent

Contraexemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e convergent la 0, dar $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |x_n - x_{n-1}| \sim$

$$\sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$ □

2. Să se demonstreze că , dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ e convergentă cu $u_n > 0$, monoton descrescător, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} n u_n = 0$.

Soluţie. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ convergentă $\Longrightarrow (s_n)_n$ convergent $\Longrightarrow (s_n)_n$ e şir Cauchy $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \geq 1$ astfel încât $|s_n - s_{n_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow$ $\Longrightarrow |u_{n_\varepsilon+1} + \ldots + u_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow u_{n_\varepsilon+1} + \ldots + u_n < \frac{\varepsilon}{2}$ (modulul dispare deoarece $u_n > 0$) $\Longrightarrow (n - n_\varepsilon)u_n < \frac{\varepsilon}{2}$ (deoarece u_n e descrescător)

Fie $n > 2n_\varepsilon \Longrightarrow n - n_\varepsilon > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \Longrightarrow \frac{n}{2}u_n < (n - n_\varepsilon)u_n <$ $< \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon = 2n_\varepsilon$ astfel încât $\forall n > N_\varepsilon$ să avem $nu_n < \varepsilon \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$ □

3. Să se demonstreze că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, cu $u_n > 0$, monoton descrescător e convergentă $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ şi $\sigma_n = s_n - nu_n$ e mărginit.

Soluţie. " $\Longrightarrow$ " $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ e convergentă $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (cf. proprietăţii 7, secţiunea 1.1)

Sirul sumelor parţiale $(s_n)_n$ e convergent şi cf. exerciţiului precedent $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = 0$, aşadar $(\sigma_n)_n$ e convergent, deci mărginit.

" $\Longleftarrow$ " Cum $(\sigma_n)_n$ e mărginit $\Longrightarrow \exists k > 0$ astfel încât $0 < \sigma_n <$ $< k, \forall n \in \mathbb{N}$

Fie $m \in \mathbb{N}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ rezultă că acestui m îi corespunde un rang n_0 astfel încât $\forall n \geq n_0$ avem $u_n \leq \frac{1}{2}u_m \Longrightarrow \frac{1}{2}mu_m = mu_m -$ $-\frac{1}{2}mu_m \leq m(u_m - u_n) \leq u_1 + u_2 + \ldots + u_m - mu_m \leq u_1 + u_2 + \ldots + u_m -$ $-mu_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n - (n-m)u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n - nu_n <$ $< k \Longrightarrow mu_m < 2k, \forall m \in \mathbb{N} \Longrightarrow u_1 + \ldots + u_n < k + nu_n < 3k,$ $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (s_n)_n$ e majorat şi cum e crescător (cf. proprietăţii 1, secţiunea 1.2) rezultă că $(s_n)_n$ e convergent, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ e convergentă

□

4. Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{n^2+n+1}$.

Soluţie. Observăm că pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem: $\mathrm{arctg}\, \frac{1}{n^2+n+1} =$ $= \mathrm{arctg}\, \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}} = \mathrm{arctg}\, \frac{1}{n} - \mathrm{arctg}\, \frac{1}{n+1}$

Găsim că : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{k^2+k+1} = 2\mathrm{arctg}\, 1 - \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

Deci seria dată este convergentă şi suma sa este $\frac{\pi}{2}$. □

5. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_{p+n}^{p}}$, unde $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ este fixat, iar în caz de convergentă să se calculeze suma.

Soluţie. $u_n = \frac{1}{C_{p+n}^{p}} = \frac{p!}{(p+n)\ldots(n+1)} = \frac{p!}{p-1}\left[\frac{1}{(n+1)\ldots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+2)\ldots(n+p)}\right]$

Deci $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{p!}{p-1}[\frac{1}{p!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ldots(k+p-1)} -$
$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+2)\ldots(k+p)} - \frac{1}{(n+2)\ldots(n+p)}] = \frac{p!}{p-1}[\frac{1}{p!} -$
$- \frac{1}{(n+2)\ldots(n+p)}] \longrightarrow \frac{1}{p-1} - \frac{p!}{p-1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{1}{p-1}$ □

6. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-1)n^2}{n!}$

Soluţie. $u_n = \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-1)n^2}{n!} = \frac{n}{(n-m)!} = \frac{n-m+m}{(n-m)!} = \frac{1}{(n-m-1)!} +$
$+ \frac{m}{(n-m)!}$

$S_n = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n = m + 1 + \frac{m}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{m}{2!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-m-1)!} +$
$+ \frac{1}{(n-m)!} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n-m-1)!} + m\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-m)!}\right] \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \mathrm{e} + m\mathrm{e}$, deci seria e convergentă □

Să se stabilească natura următoarelor serii:

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(a^{\frac{1+\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+2}}} - 1)}{n+1}, a > 0, a \neq 1$

Soluţie. Fie $x_n = \frac{1+\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+2}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \longrightarrow 0$

Stim că $\frac{a^{x_n}-1}{x_n} \longrightarrow \ln a$, dacă $x_n \longrightarrow 0$

Termenul general u_n al seriei se scrie :

$u_n = \frac{n^2}{n+1} \cdot x_n \cdot \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \frac{n}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \cdot \frac{a^{x_n}-1}{x_n} \longrightarrow \ln a \neq 0$, deci,
cf. criteriului necesar, seria este divergentă □

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2^2} \ldots \cos\frac{\alpha}{2^n}, \alpha \in (0, \pi)$

Soluţie. $u_n = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\dots\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\dots\cos\frac{\alpha}{2^n}\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} =$
$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\dots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\dots\cos\frac{\alpha}{2^{n-2}}\frac{1}{2^2}\sin\frac{\alpha}{2^{n-2}}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \dots =$
$= \frac{\frac{1}{2^n}\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \sin\alpha\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\cdot\frac{1}{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \neq$
$\neq 0$, deci, cf. criteriului necesar, seria este divergentă □

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{\ln(n+1)}}$

Soluţie. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{\ln(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^{\frac{1}{n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}\ln\ln(n+1)}}$

Calculăm $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\ln\ln(n+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln(n+2)-\ln\ln(n+1)}{n+2-(n+1)} =$
$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\right) = \ln\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = \ln 1 = 0$ (cf. lemei lui Stolz) $\displaystyle\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{\ln(n+1)}} = \frac{1}{e^0} = 1 \neq 0$, deci, cf. criteriului necesar, seria este divergentă □

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$

Soluţie. $u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n}} \Longrightarrow$
$\displaystyle\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)\dots(n+1+n+1)}{(n+1)^{n+1}}\cdot$
$\displaystyle\cdot\frac{n^n}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot$
$\cdot\frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{4}{e} \neq 0$, deci, cf. criteriului necesar, seria este divergentă □

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+3^n}$

Soluţie. Cum $\frac{1}{7^n+3^n} \leq \frac{1}{3^n}$ avem $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, deci, cf. primului criteriu de comparaţie seria este convergentă , deoarece seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ este convergentă fiind serie geometrică de raţie subunitară □

12. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n}$

Soluţie. Avem $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 3^n \cdot \frac{\pi}{5^n} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ şi, cf. primului criteriu de comparaţie, seria $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n}$ e convergentă fiind majorată de seria geometrică cu raţia $\frac{3}{5} < 1$ care e convergentă □

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2)$

Soluţie. $u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2 = \frac{n^4+2n+1-n^4}{\sqrt{n^4+2n+1}+n^2} = \frac{2n+1}{\sqrt{n^4+2n+1}+n^2}$

Aplicăm criteriul al treilea de comparaţie comparând cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{\sqrt{n^4+2n+1}+n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0, \infty)$, deci $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^4 + 2n + 1} - n^2)$ este divergentă □

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\sin \frac{\pi}{n(n+1)}} - 1)$

Soluţie. $x_n = \sin \frac{\pi}{n(n+1)} \longrightarrow 0$ şi ştim că $\frac{e^{x_n}-1}{x_n} \longrightarrow 1$

Cu criteriul al treilea de comparaţie obţinem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\sin \frac{\pi}{n(n+1)}} - 1)$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n(n+1)}$ şi aplicând încă o dată criteriul al treilea de comparaţie pentru ultima serie şi ţinând cont de faptul că $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n(n+1)}}{\frac{\pi}{n(n+1)}} = 1$ obţinem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n(n+1)}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)}$ care e convergentă □

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}$

Soluţie. Folosim criteriul al treilea de comparaţie şi comparăm cu seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}+\sqrt[n+1]{n+1}-(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n})}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}}=1\in(0,\infty),$$ deci seria este divergentă □

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\operatorname{arctg}\sqrt{1-\frac{1}{n}})$

Soluţie. $\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\operatorname{arctg}\sqrt{1-\frac{1}{n}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=$

$$=\operatorname{arctg}\frac{1+\frac{1}{n}-1+\frac{1}{n}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{n}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$$

Comparăm la limită cu seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{n}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{n}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}}{\frac{\frac{2}{n}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}}\cdot$$
$$\cdot\frac{\frac{\frac{2}{n}}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=$$
$=\frac{1}{2}\in(0,\infty)$, deci seria dată este divergentă □

17. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

Soluţie. Deoarece $\sqrt[n]{\ln n}<\sqrt[n]{n}$, pentru $\forall n\in\mathbb{N}$ avem $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, pentru $\forall n\geq 2, n\in\mathbb{N}$

Cum $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ rezultă cf. proprietăţii 8., secţiunea 1.1, că seria $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este divergentă .

Cf. primului criteriu al comparaţiei rezultă că şi seria dată este divergentă . □

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

Soluţie. Cum $\frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, rezultă , cf. criteriului al treilea al comparaţiei, că seria dată are aceeaşi natură cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Dar aceasta este seria armonică , ce este divergentă .Prin urmare şi seria dată este divergentă . □

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+a+\ldots+a^n)}, a>0$

Soluţie. Pentru $a>1$ avem $\frac{1}{n(1+a+\ldots+a^n)} < \frac{1}{a^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Cum seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ este o serie geometrică de raţie $\frac{1}{a} < 1$, ea este convergentă . Cf. primului criteriu al comparaţiei deducem că seria dată este convergentă .

Dacă $a = 1$, seria dată devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ şi, deoarece $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că şi în acest caz seria dată este convergentă .

Pentru $a<1$ vom aplica al treilea criteriu al comparaţiei folosind ca serie de comparaţie seria armonică .

Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(1+a+\ldots+a^n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a+\ldots+a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-a}{1-a^{n+1}} = 1-a$$

Cum seria armonică este divergentă , deducem că şi seria dată este divergentă , în acest caz. □

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$

Soluţie. Avem

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

Amplificând această dublă inegalitate cu $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}$ obţinem

$$\frac{1}{4n} < \left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^2 < \frac{1}{2n+1}$$

Extrăgând rădăcina pătrată şi majorând în dreapta deducem

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Prin urmare,

$$\frac{1}{2^{\alpha}n^{\frac{\alpha}{2}}} < \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^{\alpha} < \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

pentru $\forall n \geq 2$ şi $\alpha > 0$ şi

$$\frac{1}{2^{\alpha}n^{\frac{\alpha}{2}}} > \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^{\alpha} > \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

pentru $\forall n \geq 2$ şi $\alpha < 0$

De aici deducem că seria dată este de aceeaşi natură cu seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ şi, prin urmare, ea este convergentă pentru $\alpha > 2$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 2$. □

21. $\sum\limits_{n\geq 1}\left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{p}, p \in \mathbb{R}$

Soluţie. Cum $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Longrightarrow 0 < \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \Longrightarrow \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow u_n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{np}\frac{1}{n^p}$, cu $p > 0$

Folosim criteriul al treilea de comparaţie:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{np}\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{n^p}} = \mathrm{e}^p \in (0,\infty)$, deci $\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{np}\frac{1}{n^p} \sim \sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}$ care e convergentă pentru $p > 1$. Aşadar, cf. primului criteriu de comparaţie, seria $\sum\limits_{n\geq 1}\left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{p}$ e convergentă

Pentru $p \in (0,1]$ vom folosi inegalitatea $\frac{\mathrm{e}}{2n+2} < \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \frac{\mathrm{e}}{2n+1}, n \in \mathbb{N}^*(1)$

Avem (1) $\Longleftrightarrow \frac{1}{2n+2} < 1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\mathrm{e}} < \frac{1}{2n+1} \Longleftrightarrow -\frac{1}{2n+2} > -1 + \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\mathrm{e}} > -\frac{1}{2n+1} \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{2n+2} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\mathrm{e}} > 1 - \frac{1}{2n+1} \Longleftrightarrow \frac{2n+1}{2n+2} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\mathrm{e}} > \frac{2n}{2n+1} \Longleftrightarrow \frac{2n+2}{2n+1} < \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} < \frac{2n+1}{2n} \Longleftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right) < \ln \mathrm{e} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \Longleftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right) < 1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

Considerăm funcţiile $f, g\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{2x+1}\right) + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1, g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$

Arătăm că $\forall x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) < 0 < g(x)$

$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+\frac{1}{2x+1}}\cdot\left(-\frac{2}{(2x+1)^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(2x+2)(2x+1)} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{2x+1} \Longrightarrow f''(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{4}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)(2x+1)}, \forall x \geq 1 \Longrightarrow f'$ e descrescătoare şi cum $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) > 0, \forall x \geq 1 \Longrightarrow f$ e crescătoare şi cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) < 0, \forall x \geq 1$

$g'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \Longrightarrow g''(x) = \frac{(2x+1)^2+x(x+1)}{x^2(x+1)^2(2x+1)^2} > 0 \Longrightarrow g'$ crescătoare şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} g'(x) = 0 \Longrightarrow g'(x) < 0, \forall x \geq 1 \Longrightarrow g$ descrescătoare şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = 0 \Longrightarrow g(x) > 0, \forall x \geq 1$

Deci $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{e}{2n+2}\right)^p < \sum\limits_{n\geq 1}\left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p$, iar $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{e}{2n+2}\right)^p$ este divergentă pentru $p \in (0,1]$, aşadar seria $\sum\limits_{n\geq 1}\left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p$ este divergentă cf. primului criteriu de comparaţie

Pentru $p \leq 0$ avem $\sum\limits_{n\geq 1}\left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p > \sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{np}\dfrac{1}{n^p}$, deci seria $\sum\limits_{n\geq 1}\left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p$ este divergentă deoarece este minorată de o serie divergentă , termenul ei general nesatisfăcând criteriul necesar de convergenţă □

22. $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}, a > 0$

Soluţie. Avem $\sqrt[n]{n!} \geq 1, \forall n \Longrightarrow \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \leq a^n$

Pentru $a < 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \sum\limits_{n\geq 2} a^n$ care e serie geometrică cu raţia subunitară , deci convergentă şi atunci cf. primului criteriu de comparaţie seria $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$ este convergentă

$\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n \Longrightarrow \frac{a^n}{n} \leq \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{a^n}{n} \leq \sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$

Pentru $a > 1$ aplicăm criteriul raportului pentru seria $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{a^n}{n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1}}{\frac{a^n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{n}{n+1} = a > 1$, deci seria e divergentă şi, cf. primului criteriu de comparaţie seria $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}$ e divergentă

Pentru $a = 1$ obţinem seria $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ şi avem $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n} \leq \sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, deci cf. primului criteriu de comparaţie seria $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ este divergentă □

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, a > 0$

Soluţie. Cf. criteriului raportului avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$
$= \frac{a}{e}$

Dacă $0 < a < e$, seria este convergentă

Dacă $a > e$, seria este divergentă

Dacă $a = e$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

Cum $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ avem $1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} <$
$< \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1 + \frac{1}{n} \Longrightarrow 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \Longrightarrow a_n < a_{n+1}$,
dar $a_n > 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, rezultă că seria este divergentă □

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \sin a \sin \frac{a}{2} \ldots \sin \frac{a}{n}, a \in (0, \pi)$

Soluţie. Aplicăm criteriul raportului :
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) \sin \frac{a}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n+1}} \cdot a = a$

Dacă $0 < a < 1$, seria este convergentă

Dacă $1 < a < \pi$, seria este divergentă

Dacă $a = 1$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \sin 1 \sin \frac{1}{2} \ldots \sin \frac{1}{n}$

Cf. criteriului lui Raabe-Duhamel avem
$\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{(n+1) \sin \frac{1}{n+1}} - 1\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1-(n+1)\sin\frac{1}{n+1}}{(n+1)\sin\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1-\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}}{\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}}$$

Pentru calculul limitei trecem la funcţii $\frac{1}{n+1} \longmapsto x$. Aşadar,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{\sin x} - \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x} - \frac{x-\sin x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} - \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} - 0 = 0 \text{ (am folosit l'Hospital)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = 0 < 1, \text{ rezultă că seria este divergentă} \qquad \square$$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot a^n, a>0$

Soluţie. Avem $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a\cdot \mathrm{e}$

Prin urmare, cf. criteriului rădăcinii, dacă $a < \frac{1}{\mathrm{e}}$, seria dată este convergentă , iar dacă $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$, seria dată este divergentă .

Dacă $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n}$.

Din inegalitatea $\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$, obţinem

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Rezultă că şirul termenilor seriei date nu converge către 0 în cazul $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$, deci, cf.propr.8., seria este divergentă în acest caz. $\square$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^n}{\sqrt{(16n^2+5n+1)^{n+1}}}$

Soluţie. Cf. criteriului rădăcinii avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{(16n^2+5n+1)^{\frac{n+1}{2n}}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{(16n^2+5n+1)}\cdot \sqrt[2n]{16n^2+5n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(16+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}(16+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2n}}} = \frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4} < 1, \text{ deci}$$

seria este convergentă . □

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n^a}, a \in R$

Soluţie. Amplificăm cu conjugata şi folosim criteriul al treilea de comparaţie cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{n^a}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^a(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2})}$$

Alegând $\alpha = a + \frac{2}{3}$, se obţine limita $\frac{1}{3}$ (finită şi nenulă) şi deci seria este convergentă dacă şi numai dacă $a > \frac{1}{3}$. □

28. $\displaystyle a + \sum_{n=2}^{\infty}(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\dots(2-\sqrt[n]{e})\cdot a^n, a > 0$

Soluţie. Cf. criteriului raportului avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} a(2-\sqrt[n+1]{e}) = 2a - a\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = 2a - a = a$$

Aşadar,dacă $a < 1$, seria dată este convergentă , iar dacă $a > 1$, ea este divergentă .

În cazul $a = 1$ avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - \sqrt[n+1]{e} > 2 - \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = 2 - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$$

Deci, cf. celui de-al doilea criteriu al comparaţiei rezultă divergenţa seriei date, deoarece seria cu care o comparăm este cea armonică . □

29. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ fixat

Soluţie. Dacă $\alpha = 0$, seria devine $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}1$ şi e divergentă

Dacă $\alpha < 0$, $(n^{\frac{1}{n}} - 1)^\alpha \longrightarrow \infty$, deci cf. criteriului necesar rezultă că seria e divergentă

Dacă $\alpha > 0$, seria se scrie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1\right)^\alpha$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1\right)^\alpha}{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha} = 1 \in (0, \infty)$, cf. criteriului al treilea de comparaţie, seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1\right)^\alpha$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^\alpha$

Folosim criteriul de condensare al lui Cauchy şi obţinem $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^\alpha \sim$
$\sim \sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n \left(\dfrac{\ln 2^n}{2^n}\right)^\alpha = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^\alpha (\ln 2)^\alpha}{2^{(\alpha-1)n}}$.

Pentru ultima serie vom aplica criteriul radicalului :

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^\alpha (\ln 2)^\alpha}{2^{(\alpha-1)n}}} = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$

Dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1 \iff \alpha > 1$, atunci seria este convergentă

Dacă $\frac{1}{2^{\alpha-1}} > 1 \iff \alpha < 1$, atunci seria este divergentă

Dacă $\alpha = 1$, atunci seria devine $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ care e divergentă deoarece $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, deci seria iniţială este divergentă □

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, a > 0$

Soluţie. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{\ln(n+1)}}{a^{\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\ln\frac{n+1}{n}} = 1$, criteriul raportului nu ne poate preciza natura seriei, de aceea vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:

$\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n \left(a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1}{\ln\frac{n}{n+1}}\cdot$
$\cdot \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \ln a \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \ln a \cdot \ln\dfrac{1}{e} = -\ln a$

Prin urmare, dacă $-\ln a > 1$,adică $a < \frac{1}{e}$, seria dată este convergentă iar dacă $a > \frac{1}{e}$ este divergentă .

Dacă $a = \frac{1}{e}$, atunci $a^{\ln n} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \frac{1}{n}$, deci seria dată este chiar seria armonică , aşadar este divergentă . □

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}, \alpha \in \mathbb{R}_+$

Soluţie. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:
$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\alpha+n+1}{n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha n}{n+1} = \alpha$

Dacă $\alpha > 1$, seria este convergentă

Dacă $\alpha < 1$, seria este divergentă

Dacă $\alpha = 1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+1)(1+2)\dots(1+n)} =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 3\cdot(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergentă □

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$

Soluţie. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:
$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \infty >$
> 1, deci seria este convergentă □

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1!+2!+3!+\dots+n!}{(n+2)!}$

Soluţie. Vom aplica criteriul lui Raabe-Duhamel:
$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{(1!+2!+3!+\dots+n!)(n+3)}{1!+2!+3!+\dots+n!+(n+1)!}-1\right) =$
$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{(1!+2!+3!+\dots+n!)(n+3)-[1!+2!+3!+\dots+n!+(n+1)!]}{1!+2!+3!+\dots+n!+(n+1)!} =$
$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\frac{(1!+2!+3!+\dots+n!)(n+2)}{1!+2!+3!+\dots+n!+(n+1)!}+\right.$
$\left.+\frac{1!+2!+3!+\dots+n!-[1!+2!+3!+\dots+n!+(n+1)!]}{1!+2!+3!+\dots+n!+(n+1)!}\right] =$
$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{(1!+2!+3!+\dots+n!)(n+2)-(n+1)!}{1!+2!+3!+\dots+n!+(n+1)!} =$
$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{(1!+2!+3!+\dots+(n-1)!)(n+2)+n!(n+2)-(n+1)!}{1!+2!+3!+\dots+n!+(n+1)!} =$
$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{(1!+2!+3!+\dots+(n-1)!)(n+2)+n!}{1!+2!+3!+\dots+(n+1)!} =$
$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{(1!+2!+3!+\dots+(n-1)!)(n+2)+n!}{(n+1)!}\cdot$
$\cdot\frac{(n+1)!}{1!+2!+3!+\dots+(n+1)!}$

Calculăm următoarea limită cu lema lui Stolz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+3!+\ldots+(n+1)!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+2)!-(n+1)!}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)!(n+2-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{(1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!)(n+2)+n!}{(n+1)!}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)(1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!)+n\cdot n!}{(n+1)!}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)(1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!)}{(n-1)!n(n+1)}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!}{(n-1)!}+1=1+1=2>1,$$ deci seria este convergentă □

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{b(b+1)...(b+n-1)}(c-2)^n, a>0, b>0, c>2$

Soluţie. Se aplică criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a(a+1)...(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)...(b+n-1)(b+n)}(c-2)^{n+1}}{\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{b(b+1)...(b+n-1)}(c-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+n}{b+n}(c-2)=c-2,$$

deci pentru $2<c<3$ seria converge, şi pentru $c>3$ seria diverge; dacă $c=3$, se aplică criteriul Raabe-Duhamel şi rezultă : dacă $b-a<1$ seria diverge, dacă $b-a>1$, seria converge. Dacă $b-a=1$, atunci seria este divergentă (seria armonică). □

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}, p>0, q>0$

Soluţie. Dacă $p>1$, atunci seria converge pentru orice $q>0$ deoarece (se aplică primul criteriu de comparaţie):

$$\frac{1}{n^p\ln^q n}\leq\frac{1}{n^p}.$$

Dacă $p=1$, se aplică criteriul integral: seria converge dacă şi numai dacă $q>1$.

Dacă $p<1$ se aplică criteriul de condensare: seria are aceeaşi natură cu seria cu termenul general $\frac{1}{n^q 2^{n(p-1)}\ln^q 2}$, care este divergentă pentru orice $q>0$ (se poate aplica criteriul raportului). □

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sin \frac{\pi}{n}, \alpha \in R$

Soluţie. Aplicând criteriul de comparaţie la limită , rezultă că seria are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ □

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}$

Soluţie. Aplicăm criteriul logaritmic:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}}\right)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)^{-\ln(\ln n)}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{[\ln(\ln n)]^2}{\ln n} = 0$$

Deci seria este divergentă . □

38. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

Soluţie. Aplicăm criteriul logaritmic:
$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln n^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2\ln n - \ln \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\ln n} =$
$= \lim_{n\to\infty} \left(-2 + \frac{\sqrt{n}\ln \mathrm{e}}{\ln n}\right) = -2 + \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \infty > 1$, deci seria e convergentă □

39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Soluţie. Aplicăm criteriul integral:
$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{n\to\infty} [\ln(\ln n) - \ln(\ln 2)] = \infty$, deci seria este divergentă □

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n} + 1}{n}$

Soluţie. Scriem seria ca sumă de două serii: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Prima serie este convergentă cf. criteriului lui Leibniz, iar cea de-a doua este seria armonică , deci divergentă . Atunci seria sumă este divergentă □

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\log_a n}{n}, a > 1$

Soluţie. Pentru a arăta că această serie satisface condiţiile din criteriul lui Leibniz vom considera funcţia $f(x) = \frac{\log_a x}{x}, x \in [1, +\infty)$

Avem $f'(x) = \frac{\frac{x}{x\ln a} - \log_a x}{x^2} = \frac{\log_a e - \log_a x}{x^2}$

Deoarece $a > 1$,funcţia $\log_a x$ este crescătoare, deci $f'(x) < 0$ pentru $\forall x >$ e. Prin urmare, $f(x)$ descreşte în intervalul (e, $+\infty$), deci pentru $\forall n >$ e, $n \in \mathbb{N}$, şirul $\frac{\log_a n}{n}$ descreşte.

Apoi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_a x}{x} = 0.$

Aşadar, seria dată este convergentă . □

42. Există serii alternate convergente care nu satisfac condiţiile din criteriul lui Leibniz?

Soluţie. Dacă o serie alternată este convergentă , şirul modulelor termenilor ei tinde către 0. Prin urmare, trebuie stabilit dacă există serii alternate convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$, pentru care şirul $(u_n)_n$ nu este descrescător.

Să presupunem că seria alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ satisface criteriul lui Leibniz şi să notăm

$$v_n = \begin{cases} u_{n-1}, & \text{pentru } n = 2k \\ -u_{n+1}, & \text{pentru } n = 2k+1 \end{cases}$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ este evident alternată , iar şirul $(|v_n|)_n$ tinde către 0,dar nu este descrescător. Să notăm acum cu $(s_n)_n$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ şi cu $(\sigma_n)_n$ pe cel al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$. Dacă luăm $s_0 = 0$ avem

$$\sigma_n = \begin{cases} s_n, & \text{pentru } n = 2k \\ s_{n-1} - u_{n+1}, & \text{pentru } n = 2k+1 \end{cases}$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty}s_n$, ceea ce demonstrează că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ este convergentă .

Prin urmare , răspunsul la problemă este afirmativ , deci condiţiile din criteriul lui Leibniz sunt numai suficiente , nu şi necesare , pentru convergenţa seriilor alternate. □

43. Să se dea un exemplu de serie alternată divergentă pentru care şirul termenilor converge la 0.

Soluţie. Să considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2+(-1)^n}{n}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = $ $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2n} = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1} = 0$, rezultă că şirul $(u_n)_n$ al modulelor termenilor acestei serii converge către 0. Atunci şirul termenilor ei converge de asemenea către 0. Să stabilim acum natura acestei serii. Avem

$s_{2n} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \ldots - \frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) -$
$-\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$

Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right) = C$ (constanta lui Euler) şi notând cu $\varepsilon_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n - C$ obţinem

$s_{2n} = \frac{3}{2}(C + \ln n + \varepsilon_n) - \frac{C}{2} - \ln\sqrt{4n} - \eta_n = C + \frac{1}{2}\ln\frac{n^2}{4} + \frac{3}{2}\varepsilon_n - \eta_n$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = +\infty$.

De aici deducem că şirul $(s_n)_n$ al sumelor parţiale este divergent, ceea ce înseamnă că seria dată este divergentă . □

44. Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\cdot\sin n^2}{\sqrt{n}}$

Soluţie. Vom aplica criteriul lui Dirichlet luând $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ care e descrescător la 0 şi $v_n = \sin n\cdot\sin n^2$.

Arătăm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}[\cos(n-n^2) - \cos(n+n^2)] = \frac{1}{2}[1 - \cos(n+n^2)] \le \frac{1}{2}$$

Aşadar, seria este convergentă . □

Să se studieze convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriilor următoare:

45. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n+1}$

Soluţie. Pentru a studia convergenţa absolută vom aplica criteriul rădăcinii. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n\sin^{2n}x}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin^2 x}{\sqrt[n]{n+1}}=2\sin^2 x,\text{ deoarece}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1$$

Prin urmare, seria dată este absolut convergentă pentru $2\sin^2 x<1$, adică $1-\cos 2x<1$ sau $\cos 2x>0$. Ultima inegalitate este satisfăcută pentru $2k\pi-\frac{\pi}{2}<2x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$ sau $k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}$, k întreg.

Pentru $\cos 2x<0$, adică $k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4}$, seria dată este divergentă .

Pentru $x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ care, cf. criteriului lui Leibniz, este convergentă . Deoarece seria modulelor este divergentă căci este seria armonică din care lipseşte primul termen, deducem că în acest caz seria dată este semiconvergentă . □

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+p)}{n!n^q}$, $p,q\in\mathbb{N}$ fixaţi

Soluţie. Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=n\left(\frac{(n+1)^{q+1}}{n^q(n+1+p)}-1\right)=\frac{(n+1)^{q+1}-n^{q+1}-(1+p)n^q}{n^q+(1+p)n^{q-1}}=$$

$$=\frac{(q-p)n^q+\sum_{k=0}^{q-1}C_{q+1}^k n^k}{n^q+(1+p)n^{q-1}}\longrightarrow q-p$$

Dacă $q-p>1\Longleftrightarrow q>p+1$, atunci seria este absolut convergentă

Dacă $q<p+1$:

$$|u_n|=\frac{1}{p!}\cdot\frac{(n+p)!}{n!n^q}=\frac{1}{p!}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{p}(n+k)}{n^q}=\frac{1}{p!}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{p}(1+\frac{k}{n})}{n^{q-p}}.$$

Dacă $p=q\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}|u_n|=\frac{1}{p!}$, deci seria este divergentă cf. criteriului necesar

Dacă $q<p\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}|u_n|=\infty$, deci seria ester divergentă cf. criteriului necesar

Pentru $q=p+1$, seria este convergentă , cf. criteriului lui Leibniz.

Pentru $p = 0 \Longrightarrow u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n^q}$. Atunci pentru $q > 1$, seria e absolut convergentă ; pentru $q = 1$, seria e convergentă ; pentru $q = 0$, seria e divergentă □

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}}, \alpha \in \mathbb{R}$

Soluţie. Pentru a studia convergenţa absolută vom aplica criteriul al treilea al comparaţiei, folosind ca serie de comparaţie seria armonică generalizată

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Prin urmare, pentru $\alpha > 1$, seria dată este absolut convergentă .

Pentru $\alpha \leq 0$, ea este divergentă , deoarece şirul termenilor ei nu tinde către 0.

Ne-a rămas de studiat cazul $0 < \alpha \leq 1$. Vom aplica criteriul lui Abel, luând $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ şi $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este evident convergentă deoarece ea satisface condiţiile din criteriul lui Leibniz. Şirul $(\alpha_n)_n$ are limita 1, deci este convergent, deci şi mărginit. Trebuie să mai arătăm că el este monoton.
Intr-adevăr, se ştie că $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$, deci pentru $\forall n \geq 3$ avem $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$ sau $(n+1)^n < n^{n+1}$. Ridicând această inegalitate la puterea $\frac{1}{n(n+1)}$ obţinem $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$,de unde deducem că pentru $n \geq 3$ şirul $(\alpha_n)_n$ este crescător. Prin urmare, înlăturând din seria dată primii doi termeni, ceea ce nu-i schimbă natura,obţinem o serie ce satisface toate condiţiile criteriului lui Abel, deci e convergentă .
Aşadar, pentru $0 < \alpha \leq 1$, seria dată este semiconvergentă . □

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$

Soluţie. Seria nu este absolut convergentă (se compară la limită cu seria armonică). Seria este alternată ; vom demonstra că şirul $a_n = \sqrt[n]{n}\sin\frac{1}{n}$ este descrescător la 0, deci seria converge.
Evident $a_n \to 0$; pentru a arăta că a_n este descrescător (începând de la un rang suficient de mare), fie funcţia $f(x) = x^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}$. Calculăm

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}\left((1-\ln x)\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

Pentru a studia semnul derivatei (pentru x "mare"), calculăm:

$$\lim_{x\to\infty}(1-\ln x)\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}=-1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=-1,$$

deci $f'(x) < 0$ pentru x suficient de mare, deci şirul a_n este descrescător. □

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n^2}, \alpha\in\mathbb{R}$

Soluţie. Deoarece $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2} < \frac{1}{n^2}, \forall n\in\mathbb{N}$, rezultă cf. primului criteriu al comparaţiei, că seria dată este absolut convergentă . □

50. Să se arate că există serii divergente a căror sumă este o serie convergentă .

Soluţie. Seriile $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ şi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}$ sunt divergente(pentru că termenul general nu tinde la 0, nici măcar nu are limită $u_{2n}=-1, u_{2n+1}=$ $=1, v_{2n}=1, v_{2n+1}=-1$), iar suma lor este o serie convergentă , deoarece toţi termenii ei sunt nuli. □

51. Se poate ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie divergentă ? Dar ca produsul a două serii semiconvergente să fie o serie convergentă ?

Soluţie. Vom considera seria semiconvergentă $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ şi vom calcula pătratul ei, adică vom efectua produsul acestei serii cu ea însăşi. Obţinem astfel seria cu termen general
$w_n=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{i}\cdot\sqrt{n-i+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right)$
Deoarece fiecare termen din paranteză este mai mare decât $\frac{1}{n}$,rezultă că $|w_n|>1$, deci seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ este divergentă căci şirul termenilor ei nu converge către 0. Aşadar, produsul a două serii semiconvergente poate fi o serie divergentă .

Să considerăm acum seria armonică alternată , care e o serie semiconvergentă şi să calculăm pătratul ei. Atunci
$w_n=(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2\cdot(n-1)}+\ldots+\frac{1}{i\cdot(n-i+1)}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]$

Folosind identitatea $\frac{1}{i(n-i+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i+1}\right)$,obţinem
$w_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$
Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} |w_n| = 0$.(se poate verifica uşor folosind cunoştinţe elementare de liceu)
Din relaţia
$|w_n| - |w_{n+1}| = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$

deducem că şirul $(|w_n|)_n$ este descrescător. Prin urmare, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ verifică condiţiile din criteriul lui Leibniz, deci este convergentă . Aşadar, produsul a două serii semiconvergente poate fi şi o serie convergentă

□

52. Se poate ca produsul a două serii divergente să fie o serie absolut convergentă ?

Soluţie. Să considerăm seriile $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$,$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ care sunt divergente deoarece nu satisfac condiţia necesară de convergenţă şi să efectuăm produsul lor. Avem
$w_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \ldots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2 + \frac{1}{2^2}\right) -$
$- \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}[2^n - (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2) + \frac{1}{2^{n+1}} - (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots +$
$+ \frac{1}{2^2}) - \frac{3}{2}] = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left[2^n - \frac{2^n - 2}{2-1} + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{3}{2}\right] =$
$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ este o serie geometrică cu raţia $\frac{3}{4} < 1$. Prin urmare, ea este absolut convergentă , deoarece termenii ei sunt pozitivi. Răspunsul la întrebarea pusă este deci afirmativ. □

Să se aproximeze cu o eroare mai mică decât ϵ sumele seriilor definite de şirul x_n:

53. $x_n = \frac{(-1)^n}{n!}, \epsilon = 10^{-3}$

Soluţie. In cazul seriilor alternate, eroarea este mai mică decât primul termen neglijat; deci cea mai mică soluţie a inecuaţiei $|x_n| < \epsilon$ este rangul primului termen neglijat. Obţinem: $\frac{1}{n!} < 10^{-3} \Rightarrow n = 7$, deci

$$S \approx \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k!} = 0,36805.$$

□

54. $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3\sqrt{n}}$, $\epsilon = 10^{-2}$

Soluţie. $n^3\sqrt{n} > 100 \Rightarrow n = 4$, deci $S \approx \sum_{k=2}^{3} \frac{1}{n^3\sqrt{n}} = 0,06725$. □

55. $x_n = \frac{1}{n!}, \epsilon = 10^{-3}$

Soluţie. Dacă S este suma seriei şi $s_n = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$, atunci

$$S - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ... \leq \frac{1}{n!}\frac{1}{n} < 10^{-3} \Rightarrow n = 6,$$

deci $S \approx 2,7166$. □

56. $x_n = \frac{1}{n!2^n}, \epsilon = 10^{-4}$

Soluţie. Fie S suma seriei şi s_n suma primilor termeni. Aplicăm rezultatul cu privire la aproximarea unei serii cu termeni pozitivi (a se vedea secţiunea teoretică); pentru aceasta, evaluăm:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2n+2} < \frac{1}{6} = k, \forall n \geq 2,$$

deci $S - s_n \leq x_n \frac{k}{1-k} = \frac{1}{n!2^n}\frac{1}{5} < 10^{-4} \Rightarrow n = 5$.
Aproximarea cerută este $S \approx s_5 = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k^2 k!} = 1,146463$. □

57. $x_n = \frac{1}{n^4(2n)!}, \epsilon = 10^{-6}$

Soluţie. Aplicăm acelaşi procedeu ca în exerciţiul anterior:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{1}{56} = k, \forall n \geq 3.$$

Rezultă $S - s_n \leq x_n \frac{k}{1-k} \leq \frac{1}{56} x_n$; din condiţia:

$$x_n \frac{k}{1-k} = \frac{1}{56} x_n < 10^{-6},$$

rezultă $n \geq 4$, deci $S \approx x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,5026212$. □

1.8 Probleme propuse

Să se determine natura şi suma seriilor următoare :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+3n+3}$

   R: Scriem $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+3n+3} = \operatorname{arctg}(n+2) - \operatorname{arctg}(n+1)$ şi obţinem suma $\frac{\pi}{4}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+\alpha+1} - 2\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\alpha-1}), \alpha > 0$

   R: convergentă , cu suma $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha+1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$, α fiind un număr real diferit de orice întreg negativ.

   R: convergentă , cu suma $\frac{1}{1+\alpha}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$

   R: convergentă , cu suma $\frac{1}{4}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$

   R: divergentă , cu suma $+\infty$

6. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

   R: convergentă , cu suma $-\ln 2$ (ţinem cont de $\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k-1}\right) = 1$, $\forall k \geq 2$)

   Să se stabilească natura seriilor următoare :

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

   R: divergentă

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n+1}{2n+3}$

   R: divergentă (cf. criteriului necesar)

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3\sqrt{n}}{n(n+1)\sqrt{n+2}}$

R: convergentă

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+n}$

R: convergentă pentru $a > 1$, divergentă pentru $a \leq 1$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$

R: convergentă ($\frac{\ln n}{2n^3-1} \leq \frac{n}{n^3}$)

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$

R: convergentă

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$

R: divergentă (cf. criteriului al treilea de comparaţie cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$)

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}$

R: divergentă (cf. criteriului al treilea de comparaţie cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$)

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$

R: convergentă (cf. criteriului al treilea de comparaţie cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$)

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$

R: convergentă

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-(n^2+n)}$

R: convergentă

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n \cdot p}}, p > 1$

R: convergentă (cf. criteriului raportului)

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$

R: convergentă pentru $a < \frac{1}{e}$, divergentă pentru $a \geq \frac{1}{e}$

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^3 - n^2 + 1}{n!} a^n, a > 0$

R: convergentă pentru $\forall a > 0$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, a > 0$

R: convergentă pentru $a < 1$, divergentă pentru $a \geq 1$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(b \cdot \frac{a+n}{a+n-1}\right)^n$

R: pentru $b < 1$, seria este convergentă , pentru $b \geq 1$, seria este divergentă (cf. criteriului radicalului şi criteriului necesar)

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n, a > 0$

R: convergentă pentru $a < 1$,divergentă pentru $a \geq 1$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}, a \in \mathbb{R}$

R: Se amplifică cu conjugata şi se aplică criteriul al treilea de comparaţie cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}, a > 0$

R: convergentă (cu criteriul lui Raabe-Duhamel)

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{n}$

R: convergentă (cu criteriul lui Raabe- Duhamel)

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left[\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}\right]^2, a \in \mathbb{R}$

    R: convergentă pentru $a \geq 0$, divergentă pentru $a < 0$ (cu criteriul lui Raabe-Duhamel)

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \dots (3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\dots (3n)}\right)^2$

    R: convergentă (cf.criteriului lui Raabe-Duhamel)

29. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^2}$

    R: divergentă (cf.criteriului logaritmic)

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}}$

    R: convergentă (cf.criteriului logaritmic)

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

    R: convergentă (cf.criteriului logaritmic)

32. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

    R: Cf. criteriului integral, seria este convergentă

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

    R: $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n+n)) =$
    $= (-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n)) = (-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$
    Cf. criteriului lui Leibniz rezultă că seria este convergentă .

34. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{3^n}$

    R: convergentă

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\cdot\cos\frac{1}{n}}{n}$

    R: convergentă (cu criteriul lui Abel)

36. Să se arate că suma dintre o serie convergentă şi una divergentă este o serie divergentă .

37. Să se studieze convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriei
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$
R: semiconvergentă , dar nu e absolut convergentă

Capitolul 2

Şiruri şi serii de funcţii

2.1 Noţiuni teoretice

Definiţia 2.1. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii,$f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se spune că şirul $(f_n)_n$ este **punctual convergent pe** $[a,b]$ **către** f pentru $n \longrightarrow \infty$ (şi se scrie $f_n \xrightarrow{PC} f$) dacă $f_n(x_0) \to f(x_0)$(în $\mathbb{R}$) pentru $\forall x \in [a,b]$.

Definiţia 2.2. Un şir $(f_n)_n$ de funcţii $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte **uniform convergent pe** $[a,b]$ **către o funcţie** $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (şi se scrie $f_n \xrightarrow{UC} f$) dacă este îndeplinită următoarea condiţie:

$\forall \varepsilon > 0$ real $\exists N(\varepsilon)$ natural astfel încât $\forall n \geq N(\varepsilon)$ să avem
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pentru $\forall x \in [a,b]$

Teorema 2.1. *(a) Un şir $(f_n)_n$ de funcţii mărginite, $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$(adică $f_n \in \mathcal{M}, \forall n \geq 0$) este uniform convergent către o funcţie $f \in \mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$*

(b) Orice şir de funcţii $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uniform convergent pe $[a,b]$ este punctual convergent pe $[a,b]$; reciproca este falsă .

Exemplul 2.1. Luăm $[a,b] = [0,1]$ şi $f_n(x) = x^n, n \geq 1$

Evident $\forall x \in [a,b]$ avem

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0,1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

adică $f_n \xrightarrow{PC} f$,unde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0,1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

Dar $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \max(\sup\limits_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)|,$
$|f_n(1) - f(1)|) = \max(\sup\limits_{x\in[0,1)} x^n, 0) = 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 1 \neq 0$. Aşadar şirul f_n este PC, dar nu este UC pe $[0,1]$.

Teorema 2.2. *(Criteriul fundamental de convergenţă uniformă al lui Cauchy) Sirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniform pe mulţimea $A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N^*$ astfel încât $\forall n \in N, n \geq n_\varepsilon, \forall p \in N, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in A$.*

Teorema 2.3. *Fie $(f_n)_n$ un şir uniform convergent de funcţii continue, $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Atunci limita $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$. In plus,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema 2.4. *Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii din $C^1_{[a,b]}$ şi f, g funcţii mărginite, $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$.Dacă $f_n \xrightarrow{PC} f$ şi $f'_n \xrightarrow{UC} g$ pe $[a,b]$, atunci f este derivabilă pe $[a,b]$ şi $f' = g$.*

Teorema 2.5. *(teorema lui Dini) Fie $(f_n)_n$ şir monoton de funcţii continue, $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{PC} f$. Atunci $f_n \xrightarrow{UC} f$.*

Teorema 2.6. *(teorema lui Polya) Fie $(f_n)_n$ şir de funcţii monotone, $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ şi fie $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă astfel încât $f_n \xrightarrow{PC} f$. Atunci $f_n \xrightarrow{UC} f$.*

Teorema 2.7. *(teorema lui Weierstrass-Stone) Pentru orice funcţie continuă $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ există un şir $(f_n)_n$ de polinoame, $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{UC} f$.*

Definiţia 2.3. Mulţimea valorilor lui x pentru care seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă se numeşte **mulţimea de convergenţă** a seriei, iar funcţia $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$,$S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ se numeşte **suma seriei**.

Definiţia 2.4. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este **simplu (punctual) convergentă către funcţia** f dacă şirul sumelor parţiale $(S_n(x))_n$ este simplu (punctual) convergent către f. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este **uniform convergentă către funcţia** f dacă şirul sumelor parţiale $(S_n(x))_n$ este uniform convergent către f. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este **absolut convergentă** dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ este simplu convergentă .

Teorema 2.8. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *o serie uniform convergentă de funcţii continue.* $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *şi s suma acestei serii. Atunci s este o funcţie continuă pe* $[a,b]$. *In plus,* $\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dx$.

Teorema 2.9. *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *o serie PC de funcţii din* $C^1_{[a,b]}$*,cu suma s pe* $[a,b]$ *şi astfel încât seria derivatelor* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *să fie UC. Atunci funcţia s este derivabilă pe* $[a,b]$ *şi,în plus,*$s' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$

Teorema 2.10. *(criteriul lui Weierstrass) Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n, f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *o serie de funcţii şi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o serie convergentă de numere reale pozitive. Dacă* $|f_n(x)| \le a_n, \forall x \in [a,b]$ *şi pentru* $\forall n \ge N, N$ *fiind fixat, atunci seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *este UC pe* $[a,b]$.

Teorema 2.11. *(criteriul general de convergenţă uniformă al lui Cauchy) Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *este uniform convergentă pe* $[a,b]$ *dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *avem* $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$ *şi* $\forall x \in [a,b]$

Teorema 2.12. *(Criteriul lui Abel) Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *de funcţii se poate scrie sub forma* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ *astfel încât seria de funcţii* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *este uniform convergentă , iar* $(\alpha_n)_n$ *este un şir monoton de funcţii egal mărginite, atunci ea este uniform convergentă .*

Teorema 2.13. *(Criteriul lui Dirichlet) Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *de funcţii se poate scrie sub forma* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ *astfel încât şirul sumelor parţiale al seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *este un şir de funcţii egal mărginite, iar* $(\alpha_n)_n$ *un şir monoton ce converge uniform către 0, atunci ea este uniform convergentă .*

Formula lui Taylor Fie $I \subseteq R$ un interval deschis şi fie $f : I \mapsto R$ o funcţie de clasă C^m pe I. Pentru orice $a \in I$ definim **polinomul Taylor** de gradul $n \leq m$ asociat funcţiei f în punctul a:

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Restul de ordin n este, prin definiţie,

$$R_{n,f,a}(x) = f(x) - T_{n,f,a}(x).$$

Polinoamele Taylor de gradul întâi (respectiv de gradul al doilea) se numesc **aproximarea liniară** (respectiv **pătratică**) ale funcţiei în jurul punctului a.

Teorema 2.14. *(Formula lui Taylor cu restul Lagrange) Fie $f : I \mapsto R$ de clasă C^{n+1} şi $a \in I$. Atunci, pentru orice $x \in I$, există $\xi \in (a,x)$ (sau (x,a)) astfel încât*

$$f(x) = T_{n,f,a}(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Observaţii 1. Restul de ordin n poate fi scris sub forma Peano :
$\exists\, \omega : I \mapsto R$ astfel încât $\lim_{x\to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ şi
$R_{n,f,a}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\omega(x)$.
2. $\lim_{x\to a} \frac{R_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$.
3. Restul de ordin n poate fi scris sub forma integrală :

$$R_{n,f,a}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

2.2 Probleme rezolvate

1. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor de funcţii:

   a) $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$

   b) $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x^n)$

   c) $f_n\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$

   Soluţie. a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

   $$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[-1,1]} |\frac{x}{1+nx^2}| \leq \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 \Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - 0| = 0 \Longrightarrow f_n(x) \xrightarrow{UC} 0$$

   b) Evident $f_n(x) \xrightarrow{PC} 0$

$f_n(x) = x^n(1-x^n) \Longrightarrow f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x^n) - x^n nx^{n-1} =$
$= nx^{n-1}(1-2x^n) \Longrightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |x^n(1-x^n)| \geq$
$\geq \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\right] == \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$, deci f_n nu converge uniform la 0.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Intrucât $\sup\limits_{x\in(-1,1)} \left|\dfrac{1-x^n}{1-x} - \dfrac{1}{1-x}\right| = \sup\limits_{x\in(-1,1)} \dfrac{|x|^n}{1-x} \geq \dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} =$
$= n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1)} \left|\dfrac{1-x^n}{1-x} - \dfrac{1}{1-x}\right| \neq 0$,deci f_n nu converge uniform. □

2. Să se arate că şirul $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ nu converge uniform pe $[0,\infty)$, însă converge uniform pe orice interval $[a,b]$,unde $0 < a < b$.

Soluţie. Evident $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-0| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \dfrac{x}{x+n} \geq \dfrac{n}{n+n} = \dfrac{1}{2} \neq 0 \Longrightarrow f_n$ nu converge uniform la 0 pe $[0,\infty)$

Deoarece $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{x}{x+n} \leq \dfrac{b}{a+n} \longrightarrow 0 \Longrightarrow f_n \xrightarrow{UC} 0$ pe $[a,b]$ □

3. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n, f_n\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$,
$f_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}$ este uniform convergent.

Soluţie. $0 \leq f_n(x) \leq \frac{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} < \frac{(n^2+1)\frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} < \frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{n}}$
deoarece $\sin^2\frac{\pi}{n} < \frac{\pi^2}{n^2} \longrightarrow 0$ şi $(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} > 0$

Aşadar, f_n converge uniform la 0 pe $(1,\infty)$ □

4. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx}{k(k+1)}$ este uniform convergent şi limita sa este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Aplicăm criteriul lui Cauchy:
$\forall x \in \mathbb{R}, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}| <$
$< \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} -$

$-\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon$,dacă $n>n_\varepsilon=$ $=\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] \Longrightarrow (f_n)_n$ este uniform convergent.

Cum f_n sunt funcţii continue $\forall n\in\mathbb{N}$,rezultă cf. Teoremei 2.2 că limita şirului e o funcţie continuă . □

5. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n$ converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar $[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}\neq\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(1)$.

Soluţie. Deoarece $|f_n(x)|=|\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n|<\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$, rezultă că şirul de funcţii converge uniform pe $\mathbb{R}$ către funcţia $f(x)\equiv 0$. Deci $f'(x)=0$ sau $[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]'=0$.

Pe de altă parte,$f'_n(1)=\frac{1}{2}$ şi, prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(1)=\dfrac{1}{2}$

Rezultatele diferă deoarece şirul derivatelor nu converge uniform pe $\mathbb{R}$ către $\frac{1}{2}$. □

6. Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ converge, dar $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$

Soluţie. Evident $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, deci $f(x)\equiv 0, x\in[0,1]$

Apoi $\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-nx^2}/_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n}$, deci

$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n}\right)=\frac{1}{2}$,iar $\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=0$

Rezultatul se explică prin faptul că şirul nu este uniform convergent. Intr-adevăr, dacă se alege $x_n=\frac{1}{n}\in[0,1]$, rezultă $f_n(x_n)=e^{-\frac{1}{n}}\longrightarrow$ $\longrightarrow 1$, deci definiţia uniform convergenţei nu este verificată . □

7. Fie $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$. Să se arate că (f_n) converge neuniform pe $[0,1]$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$.

Soluţie. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx=0$, deci şirul converge punctual la 0

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|$$

Aflăm supremumul acestei funcţii. Calculăm $f'_n(x)=\frac{n(1+n^2x^2)-nx\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}=$ $=\frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. Punctele critice sunt $x=\pm\frac{1}{n}$, dar doar $x=\frac{1}{n}\in[0,1]$.

Deci $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\right|=f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\dfrac{1}{2}\neq$ $\neq 0$. Aşadar, şirul nu converge uniform pe $[0,1]$.

Avem $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$

$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)/_0^1 = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx =$
$= 0$ □

8. Studiaţi convergenţa simplă şi uniformă a şirului de funcţii $f_n\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, f_n(x) = n\sin^n x\cos x$.

Soluţie. Evident $f_n \xrightarrow{PC} f \equiv 0$

Deoarece $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\sin^n x\cos x dx = \frac{n}{n+1}$, deci $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = 1$, iar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$, deducem că şirul f_n nu converge uniform, cf. Teoremei 2.2. □

9. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+x^2)\cdot\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}dx$.

Soluţie. Fie $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = (1+x^2)\cdot\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$.

$\lim_{n\to\infty}(1+x^2)\cdot\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} = (1+x^2)\cdot e^x = f(x)$, deci $f_n \xrightarrow{PC} f$

$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]}\left|(1+x^2)\cdot\left(\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} - e^x\right)\right| =$

$= \sup_{x\in[0,1]}\left|(1+x^2)\cdot\frac{x(e^{-x} - e^x)}{n+x}\right| \leq \frac{2e}{n}$, deci $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| =$
$= 0$, adică $f_n \xrightarrow{UC} f$

Cf. teoremei 4.3, obţinem $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+x^2)\cdot\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}dx =$
$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 (1+x^2)\cdot e^x dx = 2e - 3$ □

10. Fie $f_n\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniform convergent către $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se arate că şirul $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$ e uniform convergent.

Soluţie. Sirul (g_n) converge simplu la funcţia $g = \frac{f}{1+f^2}$

Studiem convergenţa uniformă a şirului (g_n) :

$\left|g_n(x) - \frac{f}{1+f^2}\right| = \left|\frac{f_n}{1+f_n^2} - \frac{f}{1+f^2}\right| = \left|\frac{f_n(x)+f_n(x)f^2(x)-f(x)-f(x)f_n^2}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))}\right| =$
$= \frac{|f_n(x)-f(x)|\cdot|1-f_n(x)f(x)|}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \leq |f_n(x) - f(x)|\cdot\frac{1+|f_n(x)|f(x)|}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} =$
$= |f_n(x) - f(x)|\cdot\left(\frac{1}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} + \frac{|f_n(x)|}{1+f_n^2(x)}\cdot\frac{|f(x)|}{1+f^2(x)}\right) \leq$

$\leq |f_n(x) - f(x)|\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}|f_n(x) - f(x)|, \forall x \in A \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \sup\limits_{x\in A}|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{5}{4}\sup\limits_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$, pentru că (f_n) converge uniform, deci (g_n) va converge uniform □

11. Fie şirul de funcţii $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dat de relaţia de recurenţă $f_1 \equiv 0$ şi $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}[x - f_n^2(x)], x \in [0,1], n \geq 1$. Să se arate că şirul $(f_n)_n$ converge uniform către funcţia $f(x) = \sqrt{x}$.

Soluţie. Evident $f_n \xrightarrow{PC} f$

Prin inducţie arătăm că $0 \leq f_n(x) \leq f(x), \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$

Intr-adevăr, $f_1(x) \equiv 0 \leq f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in [0,1]$. Presupunem că $f_n(x) \leq f(x), \forall x \in [0,1]$

Rezultă că $f(x) - f_{n+1}(x) = f(x) - f_n(x) - \frac{1}{2}[x - f_n^2(x)] =$
$= (f(x) - f_n(x))[1 - \frac{1}{2}(f(x) + f_n(x))] \geq (f(x) - f_n(x))(1 - f(x)) \geq$
$\geq 0, \forall x \in [0,1]$, deci $f_{n+1}(x) \leq f(x), \forall x \in [0,1]$.

Analog arătăm că $0 \leq f_n(x), \forall x \in [0,1]$. Atunci $f_n \leq f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Cum f_n şi f sunt continue, folosind teorema lui Dini, rezultă că $f_n \xrightarrow{UC} f$ □

12. Fie $f\colon [0,a] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că $\int_0^a x^n f(x)dx = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $f \equiv 0$.

Soluţie. Avem $\int_0^a P(x)f(x)dx = 0$, pentru orice polinom P cu coeficienţi reali. Cf. teoremei Stone-Weierstrass, există $(P_n)_n$ un şir de polinoame cu coeficienţii reali astfel încât $P_n \xrightarrow{UC} f$ pe $[0,a]$. Cum f este mărginită , $f \cdot P_n \xrightarrow{UC} f^2$ pe $[0,a]$. Prin urmare, $\int_0^a f^2(x)dx =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} f(x)\cdot P_n(x)dx = 0$ (cf. Teoremei 2.3). Deoarece $f^2 \geq 0$ este continuă , rezultă că $f^2 \equiv 0$, deci $f \equiv 0$. □

13. Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de funcţii:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n, x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, x \in \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\dots(2-x^{\frac{1}{n}}), x > 0$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{n^x}, a \geq 0$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

Soluţie. a) Aplicăm criteriul rădăcinii pentru seria valorilor absolute :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$$

Deci seria este absolut convergentă pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1 \Longrightarrow x < 0$ şi $x > \frac{2}{3}$.

Dacă $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| \geq 1 \Longrightarrow x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$. Deoarece $|a_n| = |f_n(x)| \geq 1$ implică $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$; rezultă că seria este divergentă .

Deci mulţimea de convergenţă este $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$

b) Folosim criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2}$$

Deoarece, pentru $x \neq 0$, $\frac{|1-x^2|}{1+x^2} < 1$ rezultă că seria dată este absolut convergentă .

Pentru $x = 0$ se obţine seria alternată convergentă $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$.Deci mulţimea de convergenţă este $\mathbb{R}$

c) Deoarece $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ şi $x > 0$, deducem că , începând de la un anumit rang n_0, termenii seriei date vor avea acelaşi semn, căci $2 - \sqrt[n]{x} > 0$ pentru $n \geq n_0$. Lăsând la o parte primii n_0 termeni, obţinem o serie cu termeni pozitivi. Aplicăm acestei serii criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\frac{x^{\frac{1}{n+1}} - 1}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} = \ln x,$$

astfel că pentru $\ln x > 1$, adică $x > \mathrm{e}$, seria dată este convergentă , iar pentru $x < \mathrm{e}$ ea este divergentă .

Pentru $x = \mathrm{e}$ avem $\frac{f_{n+1}}{f_n} = 2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} > 2 - \left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$, deoarece $\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ şi cf. criteriului al doilea al comparaţiei seria este divergentă .

Pentru $x = 2$ seria dată este convergentă , deoarece $f_n(2) = 0$.

Deci mulţimea de convergenţă este $\{2\} \cup (\mathrm{e}, \infty)$

d) Aplicând criteriul al treilea al comparaţiei, rezultă că seria dată are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, deci ambele serii sunt convergente. Aşadar, mulţimea de convergenţă este $\mathbb{R}$.

e) Să presupunem întâi că $0 < a < 1$. Deoarece această serie are termenii pozitivi îi putem aplica criteriul raportului:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^x \frac{\ln(1+a^{n+1})}{\ln(1+a^n)} = a \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a^{n+1})^{a^{-n-1}}}{\ln(1+a^n)^{a^{-n}}} = a\frac{\ln \mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}} =$
$= a < 1$, deci seria dată converge în acest caz pentru $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă $a = 1$, seria dată devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^x}$, care este convergentă pentru $\forall x > 1$.

Dacă $a > 1$, atunci $\frac{\ln(1+a^n)}{n^x} = \frac{\ln a^n(1+a^{-n})}{n^x} = \frac{\ln a}{n^{x-1}} + \frac{\ln(1+\frac{1}{a^n})}{n^x}$, deci seria dată poate fi considerată ca suma a două serii, dintre care prima converge pentru $\forall x > 2$, iar a doua pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. Aşadar, seria dată converge în acest caz pentru $\forall x > 2$.

Pentru $a = 0$ seria dată converge evident pentru $\forall x \in \mathbb{R}$, căci toţi termenii ei sunt 0.

f) Aplicăm criteriul radicalului :

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = |\sin x| \Longrightarrow$ seria e absolut convergentă dacă $|\sin x| < 1$, adică $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\}, k \in \mathbb{Z}$

Dacă $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, care e convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$

Dacă $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, care, cf. criteriului lui Leibniz, este convergentă pentru $\alpha > 0$

Aşadar, dacă $\alpha > 1$, mulţimea de convergenţă este $\mathbb{R}$; dacă $0 < \alpha \leq 1$, mulţimea de convergenţă este $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$; dacă $\alpha \leq 0$, mulţimea de convergenţă este $\mathbb{R} \setminus \{x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\}$

□

14. Să se determine mulţimea de convergenţă şi uniform convergenţa seriei $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x}\right], 0 \leq x \leq 1$. Să se determine suma seriei.

Soluţie. Şirul sumelor parţiale este
$S_n(x) = x + \left(\frac{x}{1+x} - x\right) + \left(\frac{x}{1+2x} - \frac{x}{1+x}\right) + \ldots + \left[\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x}\right] =$
$= \frac{x}{1+nx}$
Avem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x) = 0, x \in [0,1]$
Deoarece $|S_n(x)| < \frac{1}{n}, \forall x \in [0,1]$, rezultă că seria este uniform convergentă pe $[0,1]$ către funcţia identic nulă . □

Să se precizeze convergenţa seriilor:

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

Soluţie. Cum $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, avem $\frac{1}{2^n} \le x^n \le 2^n$ şi $\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{x^n} \le 2^n$. Aşadar, $\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}) \le \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(2^n + 2^n) = \frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$

Arătăm că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$ este convergentă

Fie $a_n = \frac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{n^2\sqrt{n+1}} = 0 < 1,$$

deci cf. criteriului raportului $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă

Aşadar, conform Teoremei 2.6, seria este uniform şi absolut convergentă . □

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, x \in \mathbb{R}$

Soluţie. Fie $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$. Atunci $f_n'(x) = \frac{n-n^6x^2}{(1+n^5x^2)^2}$. Punctele critice sunt $x = \pm\sqrt{\frac{1}{n^5}}$ şi funcţia $f_n(x)$ îşi atinge maximul în $x = \sqrt{\frac{1}{n^5}}$.
Deci $\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| \le f_n(x) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$

Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă , deci cf. Teoremei 2.6, seria este uniform şi absolut convergentă □

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}, x \in \mathbb{R}.$

Soluţie. Avem $f_n'(x) = \frac{2(n^4-x^2)}{4x^2+(x^2+n^4)^2}, x \in \mathbb{R}$.

De aici se vede că funcţia $f_n(x)$ are valoarea maximă pentru $x = n^2$. Cum $\lim\limits_{n\to\pm\infty} f_n(x) = 0$, rezultă că $f_n(x)$ atinge cea mai mare valoare pentru $x = n^2$, deci $|\text{arctg}\, \frac{2x}{x^2+n^4}| \leq \text{arctg}\, \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fiind convergentă , va rezulta, cf. Teoremei 2.6 (criteriul lui Weierstrass), că seria de funcţii este absolut şi uniform convergentă . □

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \frac{\cos nx}{n+1}$

Soluţie. $\left|\left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \frac{\cos nx}{n+1}\right| \leq \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] \cdot \frac{1}{n+1} =$
$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n(n+1)} < \frac{3}{n(n+1)}$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$ este convergentă pentru că o putem compara cu seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, aplicând criteriul al treilea de comparaţie. Aşadar, cf. criteriului lui Weierstrass, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \frac{\cos nx}{n+1}$ este uniform convergentă □

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{x^3+n}}, x \in \mathbb{R}$

Soluţie. Fie $s_n = \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{3} = \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow |s_n| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \forall n \Longrightarrow$ şirul sumelor parţiale ale seriei numerice $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2n\pi}{3}$ e mărginit, deci se verifică prima condiţie din criteriul lui Dirichlet.

Fie $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{x^3+n}}$.Sirul (α_n) e descrescător pe $\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, deci (α_n) converge punctual la 0. Arătăm că şirul (α_n) converge uniform pe $\mathbb{R}$ la 0 :

$|\alpha_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

Aşadar, seria este uniform convergentă , cf. criteriului lui Dirichlet. □

20. Este posibil ca o serie de funcţii continue pe o mulţime A să conveargă neuniform pe această mulţime către o funcţie continuă ?

Soluţie. Răspunsul este afirmativ.

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right], x\in[0,1]$

Toţi termenii seriei sunt funcţii continue pe $[0,1]$.Suma parţială de rang n a seriei este

$S_n(x)=\frac{x}{1+x^2}+\left(\frac{2x}{1+4x^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)+\ldots+\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]=\frac{nx}{1+n^2x^2}$,

astfel că $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0, \forall x\in[0,1]$, deci seria dată converge simplu pe $[0,1]$ către funcţia identic nulă , care este o funcţie continuă pe $[0,1]$.

Observăm că seria nu converge uniform la 0 pe $[0,1]$.

Intr-adevăr, luând $x_n=\frac{1}{n}\in[0,1]$ rezultă $S_n(x)=\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}$, deci relaţia de convergenţă uniformă nu este verificată . □

21. Fie $f_n\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}, f_n(x)=\frac{ne^{-x}+xe^{-n}}{x+n}, n\in\mathbb{N}$ şi fie $A_n=\int_0^1 f_n(x)dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}A_n$.

Soluţie. Fie $x\geq 0$, fixat.

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ne^{-x}+xe^{-n}}{x+n}=e^{-x},$$

deci u_n converge punctual la $f(x)=e^{-x}$, $\forall x\geq 0$.

Evaluăm în continuare

$$g_n(x)=|u_n(x)-f(x)|=\left(1-\frac{n}{n+x}\right)|e^{-n}-e^{-x}|,\ \forall x>0, \forall n\in N^*.$$

Dacă $x\in(n,\infty)$ atunci:

$$e^{-x}<e^{-n}\Rightarrow|e^{-n}-e^{-x}|<e^{-n}\Rightarrow g_n(x)<e^{-n}\to 0.$$

Dacă $x\in[0,n]$, atunci

$$e^{-x}\geq e^{-n}\Rightarrow|e^{-n}-e^{-x}|\leq|e^{-n}|+|e^{-x}|=$$
$$=e^{-n}+e^{-x}\leq 2e^{-x},$$

deci

$$g(x)\leq\frac{2xe^{-x}}{x+n}, \forall x\in[0,n].$$

Studiem acum variaţia funcţiei $[0,1]\ni x\mapsto\frac{2xe^{-x}}{x+n}$.

$$\left(\frac{2xe^{-x}}{x+n}\right)'=2\frac{e^{-x}}{(x+n)^2}\cdot(-x^2-nx+n),$$

deci functia $\frac{2xe^{-x}}{x+n}$ este crescătoare pe $(0, \frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2})$ şi descrescătoare pe $(\frac{\sqrt{n^2+4n}-n}{2}, n)$, deci

$$g_n(x) \leq \frac{8n}{(\sqrt{n^2+4n}+n)^2} \cdot e^{-\frac{2n}{\sqrt{n^2+4n}+n}} \longrightarrow 0.$$

Deci u_n converge uniform la f .
Aplicând transferul de integrabilitate obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = \frac{e-1}{e}.$$

□

22. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})$ converge neuniform pe $[0, 1]$ şi totuşi
$\int_0^1[\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})]dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})dx$

Soluţie. Şirul sumelor parţiale este $S_n(x) = x^n - x^{2n}$.
Deoarece $S_n(0) = S_n(1) = 0$ şi pentru $x \in (0,1)$ avem $0 < S_n(x) < < x^n$, rezultă $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$. Deci seria este simplu convergentă pe $[0, 1]$ către funcţia identic nulă .

Convergenţa nu este uniformă :

Alegem $x_n = 2^{-\frac{1}{n}} \in [0, 1]$ şi $S_n(x_n) = \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4}$

Deoarece suma seriei date este $f(x) = 0, x \in [0, 1]$, rezultă $\int_0^1 f(x)dx = = 0$.

Apoi $\int_0^1(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1}$ astfel că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1}\right)$ este convergentă şi are suma egală cu zero.

Aşadar egalitatea din enunţ e demonstrată . □

23. E posibilă integrarea termen cu termen a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}], x \in [0, 1]?$$

Soluţie. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2x[k^2 e^{-k^2x^2} - (k-1)^2 e^{-(k-1)^2x^2}] = 2xn^2 e^{-n^2x^2} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0, \forall x \in [0,1] \Longrightarrow$ seria dată e simplu convergentă pe $[0,1]$ către $f(x) = 0$

Cum în punctul $x_n = \frac{1}{n}$ avem $s_n(x_n) = \frac{2n}{e} \longrightarrow \infty$, deci seria dată nu e uniform convergentă pe $[0,1]$ către $f(x) = 0$

Avem $\int_0^1 f(x)dx = 0$ şi

$\int_0^1 2x[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}]dx = [-e^{-n^2x^2} + e^{-(n-1)^2x^2}]/_0^1 =$
$= \frac{1}{e^{(n-1)^2}} - \frac{1}{e^{n^2}}$

Dar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{e^{(n-1)^2}} - \frac{1}{e^{n^2}}\right]$ e convergentă şi are suma 1, deoarece suma ei parţială de rang n este $\sigma_n = 1 - \frac{1}{e^{n^2}} \longrightarrow 1$

Aşadar, nu e posibilă integrarea termen cu termen a seriei date. □

24. Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$, iar suma sa este o funcţie de clasă C^1.

Soluţie. Deoarece $|\frac{\sin nx}{n^3}| \le \frac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ este convergentă , cf. criteriului lui Weierstrass, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ converge uniform.

Cum $\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$ un raţionament asemănător cu cel de mai sus arată că seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniform, deci funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ este derivabilă şi $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

Intrucât funcţiile $x \longrightarrow \frac{\cos nx}{n^2}$ sunt continue şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniform, deducem că f este de clasă C^1. □

25. Să se arate că seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$, dar nu converge absolut pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Seria valorilor absolute, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+x^2}$ este divergentă pentru $\forall x \in \mathbb{R}$.

Deoarece $\frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, deducem că $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)| \leq$
$\leq \frac{1}{n}$, unde $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}, f(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$,rezultă că $f_n \xrightarrow{UC} f \equiv 0$ pe $\mathbb{R}$.

Şirul de funcţii $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n \equiv (-1)^{n+1}$ are şirul sumelor parţiale egal mărginit.Aşadar, cf.criteriului lui Dirichlet, seria de funcţii considerată este uniform convergentă . □

Să se studieze caracterul convergenţei următoarelor serii:

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}, x \in [-1,1]$

Soluţie. Suma parţială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ (1) este $S_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Deoarece $|S_n(x) - x| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}, \forall x \in [-1,1], \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că şirul $(S_n)_n$ converge uniform pe intervalul $[-1,1]$ către funcţia $f(x) =$
$= x$. Deci seria (1) este uniform convergentă pe $[-1,1]$.

Şirul de termen general $a_n = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ este un şir crescător de funcţii egal mărginite pe intervalul $[-1,1]$. Intr-adevăr,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2+x}{n+2}\left[\frac{(n+1)(n+x+2)}{(n+2)(n+1+x)}\right]^{n+1} = \frac{n+2+x}{n+2}\left[1-\frac{x}{(n+2)(n+1)+nx+2x}\right]^{n+1}$$

Aplicând aici inegalitatea lui Bernoulli obţinem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n+2+x}{n+2}\left[1-\frac{(n+1)x}{(n+2)(n+1+x)}\right] = \frac{(n+2)^2(n+1+x)+x^2}{(n+2)^2(n+1+x)} \geq 1, \forall x \in [-1,1],$$

deci şirul $(a_n)_n$ este crescător.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{x}}\right]^x = \mathrm{e}^x$, rezultă că pentru fiecare $x \in [-1,1]$ avem $a_n(x) \leq \mathrm{e}^x, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dar funcţia $g(x) = \mathrm{e}^x, x \in \mathbb{R}$ este o funcţie crescătoare.

Prin urmare, $0 < a_n(x) \leq \mathrm{e}, \forall x \in [-1,1], \forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că $(a_n)_n$ este un şir de funcţii egal mărginite pe $[-1,1]$.

Aşadar, seria dată verifică toate condiţiile din criteriul lui Abel, deci este uniform convergentă pe intervalul $[-1,1]$. □

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{1+n^3x^4}, x \in \mathbb{R}$

Soluţie. Deoarece $(1-x^2\sqrt{n^3})^2 \geq 0$, rezultă că $2x^2\sqrt{n^3} \leq 1+n^3x^4$. Prin urmare, $\frac{|(-1)^n x^2|}{1+n^3x^4} \leq \frac{1}{2\sqrt{n^3}}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, de unde, cf. criteriului lui Weierstrass, deducem că seria dată este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. □

28. Fie seria $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\ln(1+n^4x^2)}{2n}-\frac{\ln(1+(n-1)^4x^2)}{2(n-1)}\right]$, $x \in [0,1]$. Să se demonstreze că această serie este derivabilă termen cu termen, dar seria derivatelor converge neuniform pe intervalul $[0,1]$.

Soluţie. Pentru această serie avem $S_n(x) = \frac{\ln(1+n^4x^2)}{2n}$. Deoarece, în baza regulii lui l'Hospital
$$\lim_{y\to\infty}\frac{\ln(1+x^2y^4)}{2y} = \lim_{y\to\infty}\frac{4x^2y^3}{2(1+x^2y^4)} = 2x^2\lim_{y\to\infty}\frac{y^3}{1+x^2y^4} = 0,$$
rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0, \forall x \in [0,1]$. Deci seria dată este simplu convergentă pe intervalul $[0,1]$ către funcţia $f(x) = 0$,$x \in [0,1]$.

Seria formată cu derivatele termenilor ei este
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2x}{1+n^4x^2}-\frac{(n-1)^3x}{1+(n-1)^4x^2}\right] \quad (*)$$
Suma parţială de rang n a acesteia este $S_n'(x) = \frac{n^3x}{1+n^4x^2}$, de unde deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x) = 0, \forall x \in [0,1]$. Prin urmare, seria (*) este simplu convergentă pe intervalul $[0,1]$ către funcţia $g(x) = 0, x \in [0,1]$.

Cum funcţia f este derivabilă pe intervalul $[0,1]$ şi $f' = g = 0$, rezultă că seria dată este derivabilă termen cu termen pe $[0,1]$.

Pe de altă parte, $\forall n \in \mathbb{N}$, punctul $x_n = \frac{1}{n^2}$ aparţine intervalului $[0,1]$ şi $|S_n'(x)-g(x)| = \frac{n}{2}$. Aşadar $\exists\varepsilon > 0$(de exemplu $\frac{1}{3}$) astfel încât pentru $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [0,1]$ astfel încât să avem $|S_n'(x_n)-g(x_n)| > \varepsilon$, ceea ce demonstrează că seria nu este uniform convergentă pe $[0,1]$.

Acest exerciţiu dovedeşte că convergenţa uniformă pe un interval $[a,b]$ a seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ nu este o condiţie necesară pentru derivarea termen cu termen a seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ pe $[a,b]$. □

29. E posibilă derivarea termen cu termen a seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-nx^2}-e^{-(n-1)x^2}]$, $x \in [0,1]$?

Soluţie. Suma parţială de rang n a seriei este
$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}[e^{-kx^2} - e^{-(k-1)x^2}] = e^{-nx^2} - 1 \longrightarrow -1, x \in (0,1]$
şi $s_n(0) \longrightarrow 0$

Deci seria dată este punctual convergentă pe $(0,1)$ către funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x \in (0,1] \end{cases}$$

care e discontinuă în $x = 0$, deci nederivabilă în 0; aşadar nu e posibilă derivarea termen cu termen a seriei.

Aceasta se datorează faptului că seria derivatelor
$\sum_{n=1}^{\infty}[2x(n-1)e^{-(n-1)x^2} - 2xne^{-nx^2}]$ nu e uniform convergentă pe $[0,1]$.
Intr-adevăr, suma sa parţială de rang n este
$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}[2x(k-1)e^{-(k-1)x^2} - 2xke^{-kx^2}] = -2nxe^{-nx^2} \longrightarrow 0,$
$\forall x \in [0,1]$. Deci seria derivatelor e simplu convergentă către 0 pe $[0,1]$.
Cum în punctul $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,1]$ avem $|s_n'(x) - 0| = \frac{2\sqrt{n}}{e} \longrightarrow \infty$, înseamnă că seria derivatelor nu converge uniform pe $[0,1]$. □

30. Să se calculeze $\sin 32°$ cu precizia 10^{-3}.

Soluţie. Se ştie formula lui Taylor cu restul lui Lagrange :
$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$,
cu ξ între x şi $x+h$, pentru $f \in C^{n+1}$ într-un interval ce conţine x şi $x+h$

Aplicăm formula pentru $f(x) = \sin x, x = 30° = \frac{\pi}{6}, h = 2° = \frac{\pi}{90}$

Se alege n minim astfel încât $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-3} \Longrightarrow n = 1$

Deci $\sin 32° \simeq \sin 30° + \frac{\pi}{90}\cos 30° \simeq 0,5 + \frac{3,14159}{90} \cdot \frac{1,732}{2} \simeq 0,5302$ □

2.3 Probleme propuse

Să se studieze convergenţa punctuală şi uniformă a următoarelor şiruri de funcţii :

1. $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, n \geq 0$

   R: converge punctual la $f(x) = 0$, dar nu converge uniform

2. $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$

   R: converge punctual şi uniform la $f(x) = 0$

3. $f_n\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$

   R: converge punctual la $f(x) = 1$, dar nu converge uniform

4. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$

   R: converge punctual la

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   dar nu converge uniform

5. Să se arate că şirul de funcţii $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ nu este uniform convergent.

   R: funcţia limită nu este continuă

6. $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, n > 0$

   R: converge punctual la $f(x) = |x|$ şi converge şi uniform la f

7. $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} \sin nx$

   R: converge punctual la $f(x) = 0$, dar nu converge uniform deoarece $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \mathrm{e}^{-1} \sin 1 \neq 0$

8. Fie $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, n > 0$. Să se studieze convergenţa şirurilor f_n şi f_n'.

   R: şirul de funcţii f_n converge uniform la 0, iar şirul derivatelor n-are limită

9. Să se afle mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x}$.

   R: $(0, \infty)$ (cf. criteriului lui Leibniz)

10. Să se arate că seria de funcţii $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ este uniform convergentă şi că suma ei este o funcţie continuă .

    R: Cf. teoremelor 2.6 şi 2.4

    Să se studieze convergenţa seriilor:

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+n)^2}{n^4}, x \in [a,b], 0 < a < b$

    R: uniform convergentă

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$

R: uniform convergentă şi absolut convergentă (cf. criteriului lui Weierstrass)

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$

R: uniform convergentă şi absolut convergentă (cf. criteriului lui Weierstrass)

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2^n}, x \in \mathbb{R}$

R: e uniform şi absolut convergentă cf. criteriului lui Weierstrass

Capitolul 3

Serii de puteri

3.1 Convergenţa şi proprietăţile seriilor de puteri

Definiţia 3.1. O serie de funcţii de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R}$, unde $a_n \in \mathbb{R}$ se numeşte **serie de puteri.**

Numărul a_n se numeşte **coeficientul termenului de rang** n.

Toate rezultatele privind seriile de funcţii sunt valabile şi pentru seriile de puteri. Datorită caracterului lor particular, seriile de puteri au în plus următoarele proprietăţi :

1. **Teorema I a lui Abel** Pentru orice serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ există un număr $R, 0 \leq R \leq +\infty$ astfel încât:

   a) Seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$.

   b) Pentru $\forall x$ astfel încât $|x| > R$, seria este divergentă .

   c) Pentru $\forall 0 < r < R$, seria este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

   Numărul R se numeşte **raza de convergenţă** a seriei de puteri, iar intervalul $(-R, R)$ se numeşte **intervalul de convergenţă** al seriei.

2. Suma unei serii de puteri este o funcţie continuă în orice punct interior intervalului de convergenţă .

3. **Teorema a II-a a lui Abel** Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri, R raza sa de convergenţă şi f suma sa. Dacă această serie este convergentă în punctul R (sau în punctul $-R$), atunci suma f este o funcţie continuă în punctul R (sau în punctul $-R$), deci $\lim\limits_{x \to R-0} f(x) = f(R)$ ($\lim\limits_{x \to R+0} f(x) = f(-R)$).

4. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este o serie de puteri şi R raza sa de convergenţă , atunci:

   a) Seria derivatelor de ordinul n are aceeaşi raza de convergenţă R.

   b) Suma f a seriei este indefinit derivabilă pe intervalul de convergenţă şi derivata sa de ordin n,$f^{(n)}$, este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul n.

5. **Teorema lui Cauchy-Hadamard** Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri, R raza sa de convergenţă şi $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci $R = \frac{1}{\omega}$, dacă $0 < \omega < +\infty$, $R = 0$, dacă $\omega = +\infty$ şi $R = +\infty$, dacă $\omega = 0$.

Definiţia 3.2. Se numeşte **serie Taylor** o serie de funcţii de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$,$a \in \mathbb{R}$.

Toate proprietăţile seriilor de puteri se menţin pentru seriile Taylor.

3.2 Dezvoltări în serie

Definiţia 3.3. Fie I un interval,a un punct interior lui I şi f o funcţie reală definită pe I şi indefinit derivabilă pe I. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n(1)$ se numeşte **seria Taylor a funcţiei** f **în punctul** a. Fie I' intervalul de convergenţă al acestei serii. Vom spune că funcţia f este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul I' dacă ea este suma seriei (1) pe I'.

Teorema 3.1. *Funcţia $f\colon I \to \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul I' dacă şi numai dacă ea este indefinit derivabilă pe I' şi restul ei de ordin n din formula lui Taylor tinde la 0 când $n \longrightarrow \infty, \forall x \in I'$.*

Dacă $a = 0$, atunci seria (1) se numeşte **seria MacLaurin** a funcţiei f, iar dacă

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, x \in I',$$

atunci se spune că funcţia f este dezvoltabilă în serie de puteri pe I'.

Dezvoltări în serie ale unor funcţii elementare

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n,\ \forall z \in C.$

2. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ \forall |z| < 1.$

3. $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,\ \forall |z| < 1.$

4. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n}$, $\forall z \in C$.

5. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1}$, $\forall z \in C$.

6. $(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$, $\forall |z| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.3 Probleme rezolvate

Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Soluţie. Cum $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1 \Longrightarrow R = 1$ raza de convergenţă $\Longrightarrow (-1,1)$ este intervalul de convergenţă .

Pentru $x = 1$ şi $x = -1$ obţinem două serii alternate ce verifică condiţiile din criteriul lui Leibniz , deci convergente. Deci, mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$.

Să notăm cu f suma seriei. Derivând seria termen cu termen obţinem $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \frac{1}{1+x^2}$, pentru $|x| < 1$ Deci,$f(x) = \operatorname{arctg} x + c$, pentru $|x| < 1$. Făcând aici $x = 0$ deducem că $c = 0$. Aşadar $f(x) = \operatorname{arctg} x$, pentru $|x| < 1$. Din convergenţa în punctele $x = \pm 1$ a seriei date rezultă că $f(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} x =$ $= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ şi $\displaystyle\lim_{x\to -1+0} f(x) = -\frac{\pi}{4}$. Prin urmare, suma seriei date este restricţia funcţiei $\operatorname{arctg} x$ la intervalul [-1,1]. In acest fel am stabilit şi suma seriei numerice $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$, anume $\frac{\pi}{4}$ □

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^{2n-1}$

Soluţie. Notăm $\frac{1-x}{1-2x} = y$ şi obţinem seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} y^{2n-1}$

Raza de convergenţă este $R = \dfrac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{n(2n-1)}{(-1)^{n-1}} \right|} =$

$= 1$

Intervalul de convergenţă este $(-1, 1)$.

Pentru $y = -1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ care e convergentă cf. criteriului lui Leibniz

Pentru $y = 1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ care e convergentă cf. criteriului lui Leibniz

Deci mulţimea de convergenţă este $[-1, 1]$.

Pentru a vedea mulţimea de convergenţă a seriei în x rezolvăm inegalităţile $-1 \leq \frac{1-x}{1-2x} \leq 1 \Longrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$

Fie $S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} y^{2n-1}, y \in [-1, 1]$

$$S'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (y^2)^{n-1} \Longrightarrow y^2 S'(y) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (y^2)^n \Longrightarrow (y^2 S'(y))' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (y^2)^{n-1} 2y =$$
$$= 2y \sum_{n=1}^{\infty} (-y^2)^{n-1} = 2y \frac{1}{1+y^2} \Longrightarrow y^2 S'(y) = \int \frac{2y}{1+y^2} dy =$$
$$= \ln(1+y^2) + c$$

Facem $y \longrightarrow 0 \Longrightarrow c = 0$

Deci $S'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{y^2}, y \neq 0 \Longrightarrow S(y) = \int \frac{\ln(1+y^2)}{y^2} dy = -\frac{1}{y} \ln(1+y^2) +$ $+ 2\operatorname{arctg} y + c$(am integrat prin părţi)

$$\lim_{y \to 0} S(y) = 0 \Longrightarrow \lim_{y \to 0} S(y) = \lim_{y \to 0} \left(-\frac{1}{y} \ln(1+y^2) + 2\operatorname{arctg} y + c \right) =$$
$$= \lim_{y \to 0} \frac{2y}{1+y^2} + c = c \Longrightarrow c = 0 \text{ (am calculat cu l'Hospital)}$$

$S(y) = -\frac{1}{y} \ln(1+y^2) + 2\operatorname{arctg} y$

Suma seriei iniţiale este $f(x) = S\left(\frac{1-x}{1-2x}\right) = -\frac{1-2x}{1-x} \ln\left[1 + \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right] +$ $+ 2\operatorname{arctg} \frac{1-x}{1-2x}$ □

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} x^n$

Soluţie. Raza de convergenţă $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{2^n} \right|} = \frac{1}{2}$

Intervalul de convergenţă este $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Pentru $x = -\frac{1}{2}$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ şi e convergentă cu criteriul lui Leibniz

Pentru $x = \frac{1}{2}$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ şi este divergentă

Mulţimea de convergenţă este $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Notăm $2x = t^2, x \geq 0$. Atunci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n+1} =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} = S(t), t \in [0,1) \Longrightarrow tS(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Longrightarrow (tS(t))' =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2} \Longrightarrow tS(t) = \int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c$

Facem $t \longrightarrow 0 \Longrightarrow c = 0$

Atunci $S(t) = \frac{1}{2t} \ln \frac{1+t}{1-t}, t \in (0,1) \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \ln \frac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}}, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Pentru $x < 0$ notăm $2x = -t^2$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} = S(t), t \in (-1, 0)$

$tS(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} \Longrightarrow (tS(t))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow tS(t) = \operatorname{arctg} t + c$

Facem $t \longrightarrow 0 \Longrightarrow c = 0$

Atunci $S(t) = \frac{1}{t} \operatorname{arctg} t \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-2x}, x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ □

Să se determine mulţimea de convergenţă a următoarelor serii de puteri:

4. $\sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^n] x^n$

Soluţie. Raza de convergenţă este $R = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|2 + (-1)^n|}} = 1$, deci intervalul de convergenţă este $(-1, 1)$

Pentru $x = 1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^n]$ şi este divergentă deoarece termenul general nu are limită ($u_{2n} = 3$ şi $u_{2n+1} = 1$)

Analog, pentru $x = -1$, seria este divergentă .

Deci mulţimea de convergenţă este $(-1, 1)$ □

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}} \left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^n, x \neq -\frac{3}{2}$

Soluţie. Notăm $t = \frac{x+1}{2x+3}$ şi obţinem seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}} t^n$

Raza de convergenţă este

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{\sqrt{(n+1)^4+(n+1)^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^4+n^3+1}}{n+1} \right|} = 1$$

Intervalul de convergenţă este $(-1, 1)$.

Pentru $t = -1$, seria devine $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}$ care e convergentă cu criteriul lui Leibniz

Pentru $t = 1$, seria devine $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n^3+1}}$ care e divergentă deoarece o putem compara cu seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ cu ajutorul criteriului al treilea de comparaţie

Mulţimea de convergenţă este $[-1, 1)$ pentru seria în t.

Mulţimea de convergenţă pentru seria iniţială se va afla rezolvând inecuaţiile $-1 \leq \frac{x+1}{2x+3} < 1 \Longrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$. □

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}} \operatorname{tg}^n x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Soluţie. Notăm $\operatorname{tg} x = y$. Seria devine $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}} y^n, y \in \mathbb{R}$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{1+(n+1)^2}} \cdot \frac{3^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+n^2}}{(-1)^n} \right|} = \sqrt{3}$$

Intervalul de convergenţă este $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Pentru $y = -\sqrt{3}$, seria devine $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ care e divergentă deoarece e minorată de seria divergentă $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

Pentru $y = \sqrt{3}$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ care e convergentă cf. criteriului lui Leibniz

Mulţimea de convergenţă pentru seria în y este $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

Mulţimea de convergenţă pentru seria iniţială se află rezolvând inecuaţiile $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x \le \sqrt{3} \Longrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ □

7. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}\left(\frac{4x-1}{x+3}\right)^n$

Soluţie. Notăm $y = \frac{4x-1}{x+3}$ şi seria devine $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1} y^n$

Raza de convergenţă este

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{(n+1)^2+1}}{(n+1)^2+(n+1)+1} \cdot \frac{n^2+n+1}{(-1)^n\sqrt{n^2+1}}\right|} = 1$$

Intervalul de convergenţă este $(-1, 1)$

Pentru $y = -1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ şi este divergentă având aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ cf. criteriului al treilea de comparaţie

Pentru $y = 1$, seria devine $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}$ şi este convergentă cf. criteriului lui Leibniz

Mulţimea de convergenţă este $(-1, 1]$.

Mulţimea de convergenţă pentru seria iniţială se află rezolvând inecuaţiile $-1 < \frac{4x-1}{x+3} \le 1 \Longrightarrow x \in \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{3}\right]$ □

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} x^n$

Soluţie. Cf. teoremei Cauchy-Hadamard avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \sqrt[n^2]{n}}{n+\frac{1}{n}} = 1,$$

deci raza de convergenţă este $R = 1$ şi intervalul de convergenţă (-1,1).

Deoarece $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\right]^{\frac{1}{n}} = 1,$
rezultă că în punctele $x = 1$ şi $x = -1$ seria dată este divergentă .
Deci,mulţimea de convergenţă este (-1,1). □

9. Să se demonstreze că seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ este convergentă şi să se afle suma ei cu ajutorul seriilor de puteri.

Soluţie. Această serie satisface criteriul lui Leibniz,deci este convergentă . Pentru determinarea sumei vom considera seria de puteri
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$.

Raza de convergenţă este $R = \lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$, iar intervalul de convergenţă este (-1,1).

Pentru $x = 1$ obţinem tocmai seria dată . Notăm cu f suma acestei serii de puteri pe intervalul (-1,1). Prin derivare avem

$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$, pentru $|x| < 1$

De aici rezultă că

$f(x) = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$, pentru $|x| < 1$

Punând aici $x = 0$,obţinem $c = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$,căci $f(0) = 0$. Aşadar,
$f(x) = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, pentru $|x| < 1$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1} = f(1) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ □

Să se afle suma seriilor :

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$

Soluţie. Stim dezvoltarea lui e^x în serie de puteri $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow xe^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} \Longrightarrow e^x + xe^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!} \Longrightarrow (x+x^2)e^x =$
$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n+1}}{n!} \Longrightarrow (1+2x)e^x + (x+x^2)e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2x^{n+1}}{n!}$

Pentru $x = 1 \Longrightarrow 5\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$ □

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n}$

Soluţie. Seria se scrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Calculăm suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

Stim $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1,1) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n =$
$= \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3^n - 2^n)}{6^n} = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} - \frac{\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{9}{2}$ □

12. Să se calculeze $\sqrt[4]{10004}$ cu 10 zecimale exacte.

Soluţie. Ţinând seama de seria binomială scriem
$\sqrt[4]{10004} = \sqrt[4]{10000+4} = 10\sqrt[4]{1 + \frac{4}{10000}} =$
$= 10\left(1 + \frac{4}{10000}\right)^{\frac{1}{4}} = 10(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^4} + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!10^8} + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!10^{12}} + \ldots)$
Cum $10\frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!10^{12}} + \ldots < 10^{-11} \Longrightarrow \sqrt[4]{10004} =$
$= 10\left(1 + \frac{1}{4 \cdot 10^4} - \frac{3}{32 \cdot 10^8}\right) = 10(1 + 0,000025 - 0,00000000937) =$
$= 10,0002499906$

□

Să se calculeze următoarele limite cu ajutorul dezvoltărilor limitate:

13. $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$

Soluţie. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + x^6 o(x^6) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^6 o(x^6)}{x^4} = \frac{1}{12}$ □

14. $\lim_{x \to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$

Soluţie. Notăm $x = \frac{1}{t} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] =$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{t}\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + t^4 o(t^4)\right)\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[1 - 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} - t^3 o(t^3)\right] = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{3} - t^2 o(t^2)\right) = \frac{1}{2} \qquad \square$$

15. $l = \lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

Soluţie. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(1+x-\frac{x^3}{3!}+\dots\right)} =$

$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\dots\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^2+\dots\right]} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\dots\right)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow l = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\dots\right)} = \mathrm{e} \qquad \square$$

Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-3} integralele:

16. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}dx$

Soluţie. Se dezvoltă integrantul în serie de puteri în jurul lui 0, se integrează termen cu termen şi se aproximează seria alternată rezultată

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)2^{2n+1}}.$$

$\square$

17. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$

Soluţie. Se procedează analog; rezultă :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 2^n}.$$

$\square$

18. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\text{arctg}}{x}dx$

Soluţie. Analog, se obţine:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\text{arctg}}{x}\,dx = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 3^{2n+1}}.$$

$\square$

19. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

Soluţie. Analog, rezultă :

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

□

Să se arate că funcţiile următoare sunt dezvoltabile în serie de puteri şi să se găsească această dezvoltare, specificându-se intervalul în care este valabilă :

20. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, -1 < x < 1$

Soluţie. Deoarece $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$,pentru $|x| < 1$

rezultă că f' este o funcţie binomială , deci dezvoltabilă în serie de puteri. Inlocuind în dezvoltarea funcţiei binomiale pe x cu $-t^2$ şi pe α cu -1, obţinem

$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + \ldots + t^{2n} + \ldots$, pentru $|t| < 1$

care prin integrare termen cu termen pe intervalul $[0, x]$,cu $|x| < 1$,dă

$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, pentru $|x| < 1$ □

21. $f(x) = \frac{3x}{x^2+5x+6}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$

Soluţie. Descompunând funcţia dată în fracţii simple,obţinem:

$\frac{3x}{x^2+5x+6} = \frac{9}{x+3} - \frac{6}{x+2}$

Folosind dezvoltarea funcţiei binomiale deducem că :

$\frac{9}{x+3} = 3\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} = 3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3^n}$, pentru $|x| < 3$

$-\frac{6}{x+2} = -3\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-1} = -3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n}$, pentru $|x| < 2$

Adunând aceste două dezvoltări, obţinem:

$\frac{3x}{x^2+5x+6} = 3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)x^n$, pentru $|x| < 2$ □

22. $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt, x \in [-1, 1]$

Soluţie. Funcţia $g(t) = \frac{\operatorname{arctg} t}{t}$ este continuă , deci are primitivă , adică $\exists G$ derivabilă astfel încât $G'(t) = g(t)$

Avem $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}dt\right) = \frac{d}{dx}(G(x) - G(0)) = G'(x) - G'(0) =$
$= G'(x) = g(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

Fie $h(x) = \operatorname{arctg} x \Longrightarrow h'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \le 1$$

Atunci $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}, |x| \le 1$

Deci $f(x) = \int_0^x g(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1}dt =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{2n+1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, |x| \le 1$$ □

23. Dezvoltaţi în serie de puteri funcţiile $f(x) = \arcsin x$.

Soluţie. Funcţia f e de clasă C^∞ pe $(-1,1)$ şi derivata sa $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e dezvoltabilă în serie de puteri cu raza 1.

Stim că $\forall x \in (-1,1), \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots (2n)} x^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n} x^{2n} \Longrightarrow \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{(2n+1)4^n} x^{2n+1}$$

□

24. Să se arate că funcţia $f(x) = \ln \frac{1}{x^2+2x+2}, x \in \mathbb{R}$ este dezvoltabilă în serie Taylor într-un interval ce conţine în interior punctul $x = -1$ şi să se determine această dezvoltare şi intervalul pe care ea este valabilă .

Soluţie. Avem $f'(x) = -\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} = -2\frac{x+1}{x^2+2x+2}, x \in \mathbb{R}$

Deoarece $\frac{1}{1+(x+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^{2n}$, pentru $-2 < x < 0$ rezultă că funcţia f' este dezvoltabilă în serie Taylor pe intervalul (-2,0) şi avem

$$f'(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x+1)^{2n+1}$$

Inlocuind pe x cu t şi integrând între -1 şi x, pentru $\forall x \in (-2, 0)$ obţinem:

$\ln \frac{1}{x^2+2x+2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{2n+2}}{n+1}, -2 < x < 0$ (*)

Această dezvoltare este valabilă şi în punctele $x = 0, x = -2$, căci înlocuind pe x cu aceste valori în seria Taylor a funcţiei date se obţine o serie alternată convergentă . Deci, funcţia dată este dezvoltabilă în serie Taylor în intervalul [-2,0] şi dezvoltarea ei după puterile funcţiei $x + 1$ este de forma (*). □

25. Să se arate că funcţia $f(x) = \frac{1}{2x-3}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ este dezvoltabilă în serie Taylor într-un interval ce conţine în interior punctul $x = 1$ şi să se determine această dezvoltare, specificându-se intervalul pe care ea este valabilă .

Soluţie. Avem $\frac{1}{2x-3} = \frac{1}{2x-2-1} = \frac{1}{2(x-1)-1} = -\frac{1}{1-2(x-1)} =$
$= -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-1)^n$, pentru $|x-1| < 1$,adică $0 < x < 2$ □

26. Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii, cu bazele indicate în paranteze:

a) $\cos^2 x \ (x - \frac{\pi}{4})$

b) $\frac{x}{\sqrt{1+x}} \left(\frac{x}{1+x}\right)$

Soluţie. a) Notăm $x - \frac{\pi}{4} = y \Longrightarrow x = y + \frac{\pi}{4}$

Atunci $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}+2y)}{2} = \frac{1-\sin 2y}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot$
$\cdot \sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot \frac{(2y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{n\geq 0}(-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n$

b) Notăm $\frac{x}{1+x} = y \Longrightarrow x = \frac{y}{1-y} \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x}} = y(\sqrt{1-y})^{-1} =$

$$= y(1-y)^{-\frac{1}{2}} = y\left[1 + \sum_{n\geq 1}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-y)^n\right] =$$

$$= \frac{x}{x+1} + \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}$$ □

3.4 Probleme propuse

Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriilor:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

   R: Mulţimea de convergenţă este (-1,1] şi suma $f(x) = \ln(1+x)$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$

   R: (-1,1),$f(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n$

   R: (-1,1),$f(x) = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

4. Găsiţi intervalele de convergenţă şi razele de convergenţă ale următoarelor serii:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^{2n-1}x^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n+1}x^n$

   R: a)$R = 2$;b) $R = 4$;c) $R = e$

   Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!x^n}$

   R: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$

   R: (-3,3)

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n!}x^n$

   R: (-1,1)

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots(4n-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots(4n-1)}x^n$

   R: [-1,1)

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+1}(x-2)^n$

   R: [1,3)

10. Să se afle suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^3 - n^2 + 1}{n!}$ cu ajutorul seriilor de puteri.

R: Se scrie ca sumă de 3 serii şi se foloseşte dezvoltarea lui e^x în serie de puteri. Suma este 14e.

Să se calculeze următoarele limite cu ajutorul dezvoltărilor limitate:

11. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$

R: $\frac{1}{2}$

12. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{x^2}$

R: 4

13. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} - 2}{x^2}$

R: $-\frac{2}{9}$

14. Să se găsească $\sin 1^\circ$ cu 5 zecimale exacte.

R: $0,01744$

Să se arate că funcţiile următoare sunt dezvoltabile în serie de puteri şi să se găsească această dezvoltare,specificându-se intervalul în care ea este valabilă :

15. $f(x) = \ln(1 - x + x^2), x \in \mathbb{R}$

R: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x^{3n} - x^n), |x| \leq 1$

16. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

R: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[3 - 3n - \frac{7}{2^{n+1}}\right] x^n, |x| < 1$

17. $f(x) = (1 + e^x)^3, x \in \mathbb{R}$

R: $f(x) = 8 + \sum_{n=1}^{\infty} (3 + 2^n + 3^n)\frac{x^n}{n!}, -\infty < x < +\infty$

18. $f(x) = \sin^3 x, x \in \mathbb{R}$

R: $f(x) = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{9^n - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, -\infty < x < +\infty$

19. $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt, x \in [-1, 1]$

R: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, |x| \leq 1$

20. Să se arate că funcţia $f(x) = \ln x, x > 0$ este dezvoltabilă în serie Taylor într-un interval ce conţine în interior punctul $x = 2$ şi să se determine această dezvoltare,specificându-se intervalul pe care ea este valabilă .

R: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}, 0 < x \leq 4$

21. Să se dezvolte în serie de puteri funcţiile următoare, cu bazele indicate în paranteze:

a) $\frac{1}{x^2}$ $(x+1)$

b) $\ln x$ $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

R: a) $\frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n, x \in (-2, 0)$

b) $\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} - 1\right] \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n, x \in (0, \infty)$

Capitolul 4

Serii Fourier

4.1 Noţiuni teoretice

Definiţia 4.1. Fie H un spaţiu vectorial (complex sau real); o aplicaţie

$$<,>: H \times H \mapsto \mathbb{C} \text{ (respectiv } \mathbb{R})$$

se numeşte **produs scalar** dacă pentru orice $x, y, z \in H$ şi orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sunt adevărate relaţiile:
i. $< \alpha x + \beta y, z > = \alpha < x, z > + \beta < y, z >$;
ii. $< x, y > = \overline{< y, x >}$;
iii. $< x, x > \geq 0$;
iv. $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Perechea $(H, <,>)$ se numeşte **spaţiu cu produs scalar**.
Aplicaţia $\| \ \| : H \mapsto H$, $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$ este **normă** pe H şi verifică inegalitatea lui *Schwarz:*

$$| < x, y > | \leq \| x \| \| y \|, \forall x, y \in H.$$

Reciproc, un spaţiu normat $(H, \| \ \|)$ este spaţiu cu produs scalar dacă şi numai dacă este verificată legea paralelogramului:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \left(\| x \|^2 + \| y \|^2 \right), \forall x, y \in H.$$

Spaţiul $(H, <,>)$ se numeşte **spaţiu Hilbert** dacă orice şir Cauchy este convergent (spaţiul normat $(H, \| \ \|)$ este complet).
In cele ce urmează $(H, <,>)$ este un spaţiu Hilbert.

Exemplul 4.1. Spaţiul Banach $\mathbb{C}^n$ (cu norma euclidiană) este spaţiu Hilbert cu produsul scalar:

$$< x, y > = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j},$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vectori din $\mathbb{C}^n$. Analog şi pentru R^n.

Exemplul 4.2. Spaţiul Banach al şirurilor de pătrat sumabil,

$$\ell^2(N) = \{x : N \mapsto \mathbb{C} \mid \sum_{n \in N} |x(n)|^2 < \infty\}$$

este spaţiu Hilbert cu produsul scalar:

$$< x, y >= \sum_{n \in N} x(n)\overline{y(n)},$$

pentru orice şiruri $x, y \in \ell^2(N)$. Analog şi pentru spaţiul şirurilor bilaterale (definite pe Z), $\ell^2(Z)$.

Definiţia 4.2. Doi vectori $x, y \in H$ se numesc **ortogonali** (sau **perpendiculari**; notăm $x \perp y$) dacă $< x, y >= 0$. Ortogonalul unei mulţimi nevide $M \subseteq H$ este, prin definiţie, mulţimea (subspaţiul închis)

$$M^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp y, \forall y \in M\}.$$

Teorema 4.1. *(Teorema proiecţiei) Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $M \subseteq H$ o mulţime nevidă , închisă şi convexă . Atunci există un unic vector $x_M \in M$ astfel încât*

$$\| x_M \|= \inf\{\| x \| \mid x \in M\}.$$

O consecinţă importantă este generalizarea descompunerii după direcţii perpendiculare din geometria euclidiană :

Teorema 4.2. *(Descompunerea ortogonală) Fie $K \subseteq$ un subspaţiu închis şi fie $K^{\perp}$ ortogonalul său. Atunci, pentru vector $x \in H$ există (şi sunt unici) $y \in K$ şi $z \in K^{\perp}$ astfel încât $x = y + z$.*

Definiţia 4.3. Fie H un spaţiu Hilbert; o submulţime $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i\}_{i \in J}$ se numeşte **bază ortonormală** în H dacă :

i. $< \varepsilon_i, \varepsilon_j >= \delta_{ij}$ (simbolul lui Kronecker), $\forall i, j \in J$;

ii. subspaţiul vectorial generat de $\mathcal{B}$ este dens în H.

Definiţia 4.4. Spaţiul Hilbert H se numeşte **separabil** dacă admite baze ortonormale cel mult numărabile.

In continuare vom considera numai spaţii Hilbert separabile.

Definiţia 4.5. Fie H un spaţiu Hilbert (separabil), fie $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ o bază ortonormală (fixată) şi fie $x \in H$ un vector fixat; coeficienţii Fourier ai lui x (în baza $\mathcal{B}$) sunt $\widehat{x}_n =< x, \varepsilon_n >, \forall n \in N$, iar seria $\sum_{n \in N} \widehat{x}_n \varepsilon_n$ se numeşte **seria Fourier** asociată lui x. Aplicaţia

$$H \ni x \mapsto (\widehat{x}_n)_n \in \ell^2(N)$$

se numeşte **transformarea Fourier** (pe spaţiul H).

Proprietăţile seriei Fourier

i. Pentru orice $x \in H$, seria Fourier asociată , $\sum_{n\in N} \widehat{x}_n \varepsilon_n$, converge la x;
ii. $\| x \|^2 = \sum_{n\in N} |\widehat{x}_n|^2$ (**identitatea lui Parseval**);
iii. transformarea Fourier este un izomorfism (izometric) de spaţii Hilbert.

Serii trigonometrice

Un caz particular remarcabil de serie Fourier este seria trigonometrică . Considerăm spaţiul Hilbert al funcţiilor periodice (de perioadă 2π) de pătrat integrabil:

$$L^2[0,2\pi] = \{f : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{C} \mid f \text{ măsurabilă şi } \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\}.$$

Produsul scalar este

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} dt,$$

iar norma $\| f \|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$.
Pentru orice $n \in Z$, fie $\omega_n(t) = e^{int}$. Un rezultat clasic de analiză afirmă că mulţimea (sistemul trigonometric) $\mathcal{B} = \{\omega_n \mid n \in Z\}$ este bază ortonormală în $L^2[0,2\pi]$. Pentru orice funcţie $f \in L^2[0,2\pi]$, coeficienţii Fourier (în raport cu baza fixată mai sus), sunt

$$\widehat{f_n} =< f, \omega_n >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \forall n \in Z,$$

iar seria Fourier (sau seria trigonometrică) asociată funcţiei f este $\sum_{n\in Z} \widehat{f_n}\omega_n$; sumele parţiale ale seriei, $P_n = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f_k}\omega_k$, se numesc **polinoame trigonometrice** şi $\lim_{n\to\infty} P_n = f$ în spaţiul $L^2[0,2\pi]$, sau, echivalent:

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n - f \|_2 = 0.$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \| f \|_2^2 = \sum_{n\in Z} |\widehat{f_n}|^2.$$

Folosind egalitatea $e^{int} = \cos nt + i \sin nt, \forall t \in R$, seria Fourier asociată funcţiei f se poate scrie sub forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

unde coeficienţii trigonometrici (clasici) a_n şi b_n sunt:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt, \forall n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt, \forall n \geq 1.$$

Legătura dintre coeficienţii $\widehat{f}_n, a_n$ şi b_n este:

$$\widehat{f}_0 = \frac{a_0}{2}, \ \widehat{f}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \ \widehat{f}_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \ \forall n = 1, 2, ...$$

Lema lui Riemann afirmă că dacă funcţia f este integrabilă , atunci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

In legătură cu convergenţa punctuală a seriei Fourier, are loc următorul rezultat clasic:

Teorema 4.3. *(**Teorema lui Dirichlet**) Dacă $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ este o funcţie periodică de perioadă 2π, măsurabilă , mărginită , având cel mult un număr finit de discontinuităţi de speţa intâi şi având derivate laterale în orice punct, atunci seria Fourier asociată funcţiei f converge în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$ la*

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

In particular, dacă funcţia f este continuă (şi verifică celelalte ipoteze din teorema lui Dirichlet), atunci are loc descompunerea:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Condiţii suficiente pentru convergenţa uniformă a seriei Fourier sunt date în teorema următoare:

Teorema 4.4. *(**Convergenţa uniformă a seriei Fourier**) Dacă $f : R \mapsto \mathbb{C}$ este o funcţie continuă , de clasă C^1 pe porţiuni şi periodică de perioadă 2π, atunci seria sa Fourier este absolut şi uniform convergentă , iar suma este f.*

Numărul $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$ este media semnalului f, primul termen

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

este oscilaţia principală (în jurul valorii medii), iar termenul

$$a_n \cos nt + b_n \sin nt, \ n \geq 2$$

este armonica de ordinul n a funcţiei f. Perioada armonicei de ordinul n este $\frac{2\pi}{n}$, iar amplitudinea $A_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$; conform lemei lui Riemann rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$.

In cazul în care funcţia f are perioada $T = 2\ell$, $(\ell > 0)$, atunci toate rezultatele de mai sus sunt în continuare adevărate, cu adaptările corespunzătoare; baza ortonormală este

$$\{\epsilon_n \mid n \in Z\}, \text{ cu } \epsilon_n(x) = e^{i\frac{n\pi x}{\ell}},$$

iar coeficienţii Fourier sunt:

$$\widehat{f_n} = \frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}} dx, \ \forall n \in Z,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell} dx, \ \forall n = 0, 1, 2, ...,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \ \forall n = 1, 2, ...$$

Teorema lui Dirichlet se scrie:

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_n} e^{i\frac{n\pi x}{\ell}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Identitatea lui Parseval devine în acest caz:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{\ell}\int_0^{2\ell} |f(t)|^2\, dt.$$

Evident, toate rezultatele de mai sus rămân adevărate dacă înlocuim intervalul $[0, 2\ell]$ cu orice alt interval de lungime 2ℓ, de exemplu, $[-\ell, \ell]$.

Serii de sinusuri şi cosinusuri

Fie $f : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă şi fie $\tilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, periodică de perioadă 2ℓ, definită prin:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \in [0, \ell] \\ f(-x) & , \ x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

Dacă funcţia $\tilde{f}$ satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci, dezvoltând $\tilde{f}$ în serie Fourier, rezultă :

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell}, \ \forall x \in (0, \ell),$$

$$f(0+0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \; f(\ell - 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

coeficienţii a_n fiind coeficienţii Fourier reali asociaţi funcţiei $\tilde{f}$.
Formula de mai sus se numeşte dezvoltarea în serie de cosinusuri a lui f.
Analog, dacă funcţia (impară):

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \; x \in [0, \ell] \\ -f(-x) & , \; x \in (-\ell, 0) \end{cases}$$

satisface condiţiile teoremei lui Dirichlet, atunci dezvoltarea în serie de sinusuri a funcţiei f este:

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}, \; \forall x \in (0, \ell),$$

coeficienţii b_n fiind coeficienţii Fourier reali asociaţi funcţiei $\tilde{f}$.

4.2 Probleme rezolvate

Să se dezvolte în serii Fourier funcţiile:

1. $f(x) = x$, pe $(-\pi, \pi)$

   Soluţie. Intrucât funcţia f e impară avem:

   $$a_k = 0, k \geq 0,$$

   iar $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}, k > 0$ (am integrat prin părţi, ţinând cont că $\sin k\pi = 0$ şi $\cos k\pi = (-1)^k$)

   Prin urmare,$\forall x \in R$ avem $x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$

   Pentru $x = \frac{\pi}{2}$ se obţine $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ □

2. $f(x) = \pi^2 - x^2$, pe $(-\pi, \pi)$

   Soluţie. Deoarece funcţia e pară $b_k = 0, k > 0$

   $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

   $$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos kx dx = \frac{4(-1)^{k-1}}{k^2}, k > 0$$

(am integrat prin părţi)

Atunci $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos kx$

Sunt îndeplinite condiţiile Teoremei 4.3, deci dezvoltarea e valabilă pentru $x \in [-\pi, \pi]$

Pentru $x = \pi$ se obţine $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ □

3.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{dacă } x \in (-\pi, 0) \\ bx, & \text{dacă } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

Soluţie. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi}{2}(b-a)$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\cos nxdx + \int_0^{\pi} bx\cos nxdx\right)$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} ax\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} ax\sin nxdx\right)$

Calculând prin părţi următoarele două integrale obţinem

$\int x\cos nxdx = \frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx + c_1$

$\int x\sin nxdx = -\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx + c_2$

unde c_1, c_2 sunt constante de integrare.

Avem

$$\int_{-\pi}^{0} t\cos ktdt = \frac{1}{k^2}[1-(-1)^k], \int_0^{\pi} t\cos ktdt = -\frac{1}{k^2}[1-(-1)^k]$$

$$\int_{-\pi}^{0} t\sin ktdt = -\pi\frac{(-1)^k}{k}, \int_0^{\pi} t\sin ktdt = -\pi\frac{(-1)^k}{k}$$

$$a_k = \frac{a-b}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^k}{k^2}, b_k = (a+b)\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Se observă că avem

$$a_{2n-1} = \frac{2(a-b)}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n-1)^2}, a_{2n} = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este

$$f(t) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2} + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nt}{n}$$

Observaţia 4.1. Din această dezvoltare putem calcula suma seriei numerice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ care este convergentă . Intr-adevăr, funcţia

$f(t)$ este continuă în punctul $t = 0$ şi, cf. Teoremei 4.3, suma seriei Fourier în punctul $t = 0$ este egală cu $f(0)$. Avem astfel

$0 = f(0) = -\frac{a-b}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, de unde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

□

4.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ t + \frac{\pi}{2}, & t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ -t + \frac{\pi}{2}, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Soluţie. Funcţia f este pară , deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0dt\right] = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{2}t\right)/_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$= \frac{\pi}{4}$

$a_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-t + \frac{\pi}{2}\right)\cos ktdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\cos ktdt\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos k\frac{\pi}{2}}{k^2}$

Seria Fourier a funcţiei date este $f(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\frac{\pi}{2}}{n^2}\cos nt$ □

5. $f(x) = e^{ax}, a \neq 0$, pe $(-\pi, \pi)$

Soluţie. $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}dx = \frac{2}{a\pi}\text{sh}a\pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos nxdx = (-1)^n\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2a}{a^2+n^2}\cdot\text{sh}a\pi$(am integrat prin părţi)

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin nxdx = (-1)^{n-1}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2n}{a^2+n^2}\cdot\text{sh}a\pi$(am integrat prin părţi)

Atunci $e^{ax} = \frac{2}{\pi}\cdot\text{sh}a\pi\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\cdot(a\cos nx - n\sin nx)\right]$ □

6. $f(x) = |x|$, pe $[-\pi, \pi]$

Soluţie. f este pară , deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]$(am integrat prin părţi)

Deci $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ □

7. $f(x) = |\sin x|$, pe $(-\pi, \pi]$

Soluţie. f este pară , deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

Avem $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(1-n)x]dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n+1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right] = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$$

pentru $n =$ par

Atunci $|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$ ∎

8.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } -\pi < x < -\varphi, \varphi < x < \pi \\ \cos\varphi, & \text{dacă } -\varphi < x < \varphi \end{cases}$$

Soluţie. f este pară , deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi\cos nx dx +$$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos\varphi\sin n\varphi}{n} -$$
$$- \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{2(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{2(n-1)}\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)}\right]$$

Expresia e nedeterminată pentru $n = 0$ şi $n = 1$.

Avem $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi dx + \frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos x dx = \frac{2}{\pi}[\varphi\cos\varphi - \sin\varphi]$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi}\cos\varphi\cdot\cos x dx + \frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi}\cos^2 x dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}[\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \frac{1}{2}(\pi-\varphi) - \frac{1}{4}\sin 2\varphi] = \frac{1}{\pi}[\pi - \varphi + \sin\varphi\cdot\cos\varphi]$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1}{\pi}(\pi - \varphi + \sin\varphi\cdot\cos\varphi)\cos x +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{n(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\varphi}{n(n-1)}\right]\cos nx$$

9. Să se dezvolte în serie de sinusuri funcţia $f(x) = \frac{|x|}{x}$ definită în intervalul (0,l).

Soluţie. Prelungim funcţia f impar faţă de origine

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 < x < l \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } -l < x < 0 \end{cases}$$

Calculăm coeficienţii Fourier ai acestei funcţii periodice impare definite pe intervalul (-l,l):

$$a_n = 0, \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n+1}, & \text{dacă } n = 2k+1 \\ 0, & \text{dacă } n = 2k \end{cases}$$

Atunci $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{l}$ □

10. Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & \text{dacă } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x - \cos x, & \text{dacă } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Soluţie. Observăm că

$$f_1(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_2(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Deci $f_1(x) = f_2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

De aceea dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcţiei f coincide cu dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcţiei f_1 definită pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$.

Prelungim funcţia f_1 par faţă de origine şi obţinem coeficienţii Fourier:

$b_n = 0, \forall n \geq 1$

$a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x + \frac{\pi}{4})dx = \frac{4}{\pi}$

$a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos 2nx dx = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{1-4n^2} =$

$$= \begin{cases} \frac{8}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}, & \text{dacă } n = 2k \\ 0, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$$

Atunci $f(x) = \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{1-16n^2}$ □

11. Să se dezvolte funcţia $f(x) = \cos ax$ după sinusuri în intervalul $[0, \pi]$, $a \neq 0$.

Soluţie. Se prelungeşte prin imparitate în intervalul $(-\pi, 0)$.
Avem $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(a+n)x + \sin(n-a)x]dx$
Pentru $|a| = n \Longrightarrow b_n = 0$.Pentru $|a| \neq n \Longrightarrow b_n = \frac{2n}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-a^2}\cdot$
$\cdot[1-(-1)^n\cos a\pi]$
Dacă $|a|$ nu e natural, atunci $b_{2k-1} = \frac{2(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2-a^2]}(1+\cos a\pi)$ şi
$b_{2k} = \frac{4k}{\pi(4k^2-a^2)}(1-\cos a\pi), k \in \mathbb{N}$ astfel că

$$\cos ax = \frac{2}{\pi}(1+\cos a\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{(2k-1)^2-a^2}\sin(2k-1)x+$$

$$+\frac{2}{\pi}(1-\cos a\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-a^2}\sin 2kx$$

Dacă $a = 2m$, atunci $b_{2k-1} = \frac{4(2k-1)}{\pi[(2k-1)^2-4m^2]}, b_{2k} = 0$ şi

$$\cos 2mx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{(2k-1)^2-4m^2}\sin(2k-1)x, x \in [0,\pi]$$

Dacă $a = 2m-1$, atunci $b_{2k-1} = 0, b_{2k} = \frac{8k}{\pi[4k^2-(2m-1)^2]}$ şi

$$\cos(2m-1)x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4k^2-(2m-1)^2}\sin 2kx, x \in [0,\pi]$$

□

12. Să se dezvolte în serie Fourier $f(x) = 10 - x$ în $(5, 15)$

Soluţie. $a_0 = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)dx = 0$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{1}{n\pi}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}/_5^{15}+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_5^{15}\sin\frac{n\pi x}{5}dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx = -\frac{1}{n\pi}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}/_5^{15}-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_5^{15}\cos\frac{n\pi x}{5}dx = (-1)^n\frac{10}{n\pi}$$

Atunci $f(x) = \frac{10}{\pi}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$ □

13. Să se demonstreze formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \ \forall x \in (0, 2\pi).$$

Soluţie. Fie $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi)$, prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}$; calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{(\pi - x) \sin nx}{2n\pi} \Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0, \forall n \geq 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{-(\pi - x) \cos nx}{2n\pi} \Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1.$$

Aplicând teorema lui Dirichlet, rezultă :

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \ \forall x \in (0, 2\pi).$$

In punctele $x = 0$ şi $x = 2\pi$ funcţia f nu este continuă ; în aceste puncte seria trigonometrică asociată ei are suma 0. □

14. Să se demonstreze egalitatea:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin 2nx}{2n} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \ \forall x \in (0, \pi).$$

Soluţie. Din formula:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}, \ \forall x \in (0, 2\pi),$$

demonstrată în exerciţiul precedent, înlocuind pe x cu $2x$, rezultă identitatea:

$$\frac{\pi - 2x}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin 2nx}{n}, \ \forall x \in (0, \pi).$$

Impărţind acum cu 2, rezultă egalitatea cerută . □

15. Să se demonstreze identităţile:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\frac{\pi}{4},\ \forall x\in(0,\pi)$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4},\ \forall x\in(-\pi,0).$$

Să se calculeze apoi suma seriei:

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots$$

Soluţie. Pentru prima identitate se scad membru cu membru cele două egalităţi demonstrate în exerciţiile precedente; a doua identitate rezultă din prima şi din imparitatea funcţiei sinus. Pentru a calcula suma seriei numerice date, se ia $x=\frac{\pi}{3}$ în prima egalitate şi obţinem:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi}{3}}{2n-1},$$

de unde rezultă : $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots=\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. □

16. (**Fenomenul Gibbs**) In jurul unui punct de discontinuitate al unei funcţii date, seria Fourier asociată ei converge doar punctual (nu neapărat uniform). Acest fapt conduce la un defect de convergenţă (aparent paradox) al şirului sumelor parţiale asociat seriei trigonometrice date, numit fenomenul Gibbs. Dăm în continuare un exemplu în acest sens. Considerăm restricţia funcţiei signum la intervalul $(-\pi,\pi)$,

$$\text{sgn}:(-\pi,\pi)\mapsto\mathbb{R},\ \text{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & ,\ x\in(-\pi,0)\\ 0 & ,\ x=0\\ 1 & ,\ x\in(0,\pi)\end{cases}$$

In exerciţiul anterior s-a demonstrat egalitatea:

$$\text{sgn}(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\ \forall x\in(-\pi,\pi).$$

Notăm cu S_n şirul sumelor parţiale:

$$S_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\ \forall x\in(-\pi,\pi).$$

In punctul $x = 0$ funcţia sgn nu este continuă ; seria sa Fourier converge (conform teoremei lui Dirichlet) la $\frac{1}{2}(-1+1) = 0 = \text{sgn}(0)$; convergenţa $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \text{sgn}(x)$, $\forall x \in (-\pi, \pi)$ este punctuală , nu şi uniformă .

a. Să se demonstreze egalitatea:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt,\ \forall x \in (-\pi, \pi).$$

b. Să se arate că funcţia S_n are un maxim în punctul $x = \frac{\pi}{2n}$ şi:

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1,1789.$$

c. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \text{sgn}(0+)\right|.$$

Soluţie. **a.** Calculăm mai întâi suma

$$A = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x,\ \forall x \neq k\pi,\ k \in Z.$$

Pentru aceasta, considerăm şi suma $B = \sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$ şi calculăm:

$$A + iB =$$

$$= (\cos x + i\sin x) + (\cos 3x + i\sin 3x) + \ldots + (\cos(2n-1)x + i\sin(2n-1)x) =$$

$$= z^2\frac{z^{2n}-1}{z^2-1},$$

unde am notat $z = \cos x + i\sin x$. După calcule, rezultă :

$$A + iB = \frac{\sin nx}{\sin x}(\cos nx + i\sin nx),$$

şi deci:

$$\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x},\ \forall x \neq k\pi,\ k \in Z.$$

Integrând de la 0 la x, rezultă :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{2\sin t}\,dt,$$

sau, înmulţind cu $\frac{4}{\pi}$:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt,\ \forall x \in (-\pi, \pi).$$

b. Din cele demonstrate la punctul precedent rezultă că

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x}$$

şi deci $\frac{\pi}{2n}$ este punct critic al lui S_n; într-o vecinătate a lui $\frac{\pi}{2n}$ avem:

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x} > 0,\ x < \frac{\pi}{2n},$$

$$S_n'(x) = \frac{2\sin 2nx}{\pi \sin x} < 0,\ x > \frac{\pi}{2n}.$$

Rezultă că $x = \frac{\pi}{2n}$ este punct de maxim al funcţiei S_n.
Calculăm acum:

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\frac{du}{2n} = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\,du.$$

Rezultă :

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

Ultima integraă se aproximează dezvoltând funcţia sinus în serie de puteri:

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^{\pi}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n-2}\right)du =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!(2n-1)}x^{2n-1}\Big|_0^{\pi} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\pi^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$$

Seria fiind alternată , eroarea este mai mică decât primul termen neglijat. Cu o eroare mai mică decât 10^{-3}, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \approx 1,1789.$$

c. Rezultă : $\lim_{n\to\infty}\left|S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \mathrm{sgn}(0+)\right| \approx 0,1789.$ □

17. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ pe $\mathbb{R}$

Soluţie. f e pară , deci $b_k = 0, k > 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(s-a făcut schimbarea de variabilă $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$)

Fie $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (1)

Inmulţim ambii membri ai egalităţii (1) cu $2(2+\cos x)$ şi obţinem:

$$2 = 2a_0 + a_0\cos x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n \cos x \cos nx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2 = 2a_0 + a_0\cos x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x]$$

Funcţia $g(x) = 2$ poate fi considerată ca o funcţie pară , deci dezvoltabilă în serie Fourier de cosinusuri pe toată axa reală . Tinând seama de egalitatea a două serii Fourier obţinem:

$$2 = 2a_0 + a_1$$

$$0 = a_0 + 4a_1 + a_2$$

$$0 = 4a_k + a_{k+1} + a_{k-1}$$

$(k = 1, 2, \ldots)$

Sirul a_k este un şir ce verifică relaţia de recurenţă lineară

$$a_k = -4a_{k-1} - a_{k-2}$$

cu $a_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ şi $a_1 = 2 - 2a_0 = \frac{6-4\sqrt{3}}{3}$

Ecuaţia caracteristică ataşată este $r^2 + 4r + 1 = 0$ cu soluţiile
$r_1 = -2 + \sqrt{3}, r_2 = -2 - \sqrt{3}$

Atunci $a_k = c_1(-2-\sqrt{3})^k + c_2(-2+\sqrt{3})^k$, constantele c_1, c_2 determinându-se din a_0 şi a_1. Deci obţinem sistemul:

$$c_1 + c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$c_1(-2-\sqrt{3}) + c_2(-2+\sqrt{3}) = \frac{6-4\sqrt{3}}{3}$$

Aşadar, $c_1 = 0$ şi $c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

a_k va fi de forma $a_k = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-2)^k$

Deci $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3}-2)^n \cos nx$ □

18. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \ln(2 + \cos x)$

Soluţie. Prin derivare obţinem

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

Cum f' este o funcţie impară , ea este dezvoltabilă în serie Fourier de sinusuri, adică

$$\frac{-\sin x}{2 + \cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

sau

$$-\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \sin nx + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n[\sin(n+1)x + \sin(n-1)x]$$

Tinând seama de egalitatea a două serii Fourier obţinem

$$-1 = 2b_1 + \frac{1}{2}b_2$$

$$0 = 2b_k + \frac{1}{2}b_{k-1} + \frac{1}{2}b_{k+1} (*)$$

Dar $b_1 = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{8t^2}{(1+t^2)^2(t^2+3)}dt$(am făcut schimbarea $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$)

Descompunem în fracţii simple şi obţinem:

$$b_1 = -\frac{16}{\pi}\left[-\frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+3} + \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^2}\right] =$$
$$= -\frac{16}{\pi}\left(-\frac{3}{4}\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{4}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right) = 2(\sqrt{3} - 2)$$

Atunci $b_2 = -2 - 4b_1 = 2(7 - 4\sqrt{3})$

Ecuaţia caracteristică a şirului (*) este:

$$t^2 + 4t + 1 = 0$$

cu rădăcinile $t_1 = -2 - \sqrt{3}, t_2 = -2 + \sqrt{3}$

Deci

$$b_k = c_1(-2-\sqrt{3})^{k-1} + c_2(-2+\sqrt{3})^{k-1}$$

c_1 şi c_2 determinându-se din sistemul

$$2(\sqrt{3} - 2) = c_1 + c_2$$

$$2(7-4\sqrt{3}) = -2(c_1+c_2) - \sqrt{3}(c_1+c_2)$$

Soluţiile sistemului sunt $c_1 = 0, c_2 = \sqrt{3}-2$

Deci $b_k = 2(\sqrt{3}-2)^k$

Atunci avem

$$-\frac{\sin x}{2+\cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(\sqrt{3}-2)^n \sin nx$$

Integrând între 0 şi x obţinem:

$$\ln(2+\cos x) - \ln 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3}-2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3}-2)^n}{n} \cos nx$$

Dar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3}-2)^n}{n} = -\ln(3-\sqrt{3})$

Atunci $\displaystyle\ln(2+\cos x) = \ln 3 - \ln(3-\sqrt{3}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sqrt{3}-2)^n}{n} \cos nx$ □

19. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^n \frac{\sin x}{n^3+x^3} dx$$

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x = nt$ în integrala $b_n = n^2 \int_0^n \frac{\sin x}{n^3+x^3} dx$ şi obţinem $b_n = \int_0^1 \frac{\sin nt}{1+t^3} dt$

Funcţia $f(t) = \frac{1}{1+t^3}$ e continuă pe [0,1] şi b_n fiind coeficientul ei Fourier şi seria Fourier fiind convergentă , rezultă $b_n \longrightarrow 0$, când $n \longrightarrow \infty$ □

20. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x) = \frac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}, |\alpha| < 1, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluţie. Funcţia f e periodică de perioadă 2π,derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci este dezvoltabilă în serie Fourier pe $\mathbb{R}$.

Cum f e pară $\Longrightarrow b_n = 0, \forall n \geq 1$

Avem $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} dx$

Cu schimbarea $e^{ix} = z$, intervalul $[0, 2\pi]$ se transformă în cercul $|z| = 1$, deci

$$a_0 = \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\alpha z^2 - 2z + \alpha}{\alpha z^2 - z(1+\alpha^2) + \alpha} \cdot \frac{dz}{z}$$

Funcţia $F(z) = \frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{z[\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha]}$ are în interiorul domeniului $|z| = 1$ punctele singulare $z = 0$ şi $z = \alpha(|\alpha| < 1)$ ca poli simpli.

Deci $a_0 = \frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{z[\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha]}dz = \frac{1}{2}[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,\alpha)]$, unde

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{\alpha z^2-z(1+\alpha^2)+\alpha}/_{z=0} = 1$$

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{\alpha z^2-2z+\alpha}{\alpha z(z-\frac{1}{\alpha})}/_{z=\alpha} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1} = 1$$

Aşadar $a_0 = 1$

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}(\cos nx + i\sin nx)dx$$

Facem schimbarea $e^{ix} = z$ şi obţinem:

$$a_n + ib_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(\alpha z^2-2z+\alpha)z^{n-1}}{\alpha z^2+z(1+\alpha^2)+\alpha}dz = \mathrm{Res}_\alpha,$$

unde $\mathrm{Res}_\alpha = \frac{(\alpha z^2-2z+\alpha)z^{n-1}}{\alpha(z-\frac{1}{\alpha})}/_{z=\alpha} = \alpha^n$

Rezultă $a_n + ib_n = \alpha^n$, deci $a_n = \alpha^n$ şi $b_n = 0$.

Atunci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos nx, x \in \mathbb{R}$ □

21. Fie $0 < u < 1$ şi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodică astfel încât $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = \cos(ux)$.

a) Calculaţi coeficienţii Fourier ai lui f;

b) Calculaţi $g(u) = \sum_{n\geq 1}\frac{2u}{u^2-n^2}$

c) $\forall t \in [0,1]$, calculaţi $I(t) = \int_0^t g(u)du$

Soluţie. a) f este funcţie pară deci $b_n = 0, \forall n \geq 1$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(ux)du = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(n+u)x + \cos(n-u)x]du =$
$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(n+u)\pi}{n+u} - \frac{\sin(u-n)\pi}{n-u}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\frac{2u}{n^2-u^2}\cdot\sin\pi u$

Deoarece f e continuă , de clasă C^1, atunci seria sa Fourier converge uniform pe $\mathbb{R}$ şi are suma f. Deci pentru $x \in [-\pi,\pi]$,

$\cos(ux) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\frac{2u}{n^2-u^2}\cdot\sin\pi u\cdot\cos(nx)$

b) Inlocuim x cu π în formulă şi obţinem $\cos(\pi u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u} - \frac{1}{\pi}\cdot$
$\cdot\sum_{n\geq 1}\frac{2u}{n^2-u^2}\cdot \sin \pi u = \frac{\sin \pi u}{\pi u} + \frac{g(u)\sin \pi u}{\pi} / : \sin \pi u \Longrightarrow \operatorname{ctg} \pi u =$
$= \frac{1}{\pi u} + \frac{g(u)}{\pi} \Longrightarrow g(u) = \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi u - \frac{1}{u}$

c) g e continuă pe (0,1) şi se prelungeşte prin continuitate în 0 prin $g(0) = 0$

Dacă $\alpha \in (0,t)$ putem scrie $\int_0^t g(u)du = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^t \left(\pi \cdot \operatorname{ctg}\pi u - \frac{1}{u}\right) du =$
$= \lim_{\alpha\to 0}[\ln(\sin \pi u) - \ln u]/_\alpha^t = \lim_{\alpha\to 0} \ln\left(\frac{\sin \pi t}{t}\right) - \ln\left(\frac{\sin \pi\alpha}{\alpha}\right) =$
$= \ln\left(\frac{\sin \pi t}{t}\right) - \ln \pi = \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) \Longrightarrow \int_0^t g(u)du = \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)$ □

22. Fie f şi F două funcţii de pătrat integrabile definite pe $[-\pi, \pi]$ şi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

seriile Fourier ataşate lor. Să se arate că

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n)$$

Soluţie. Seriile Fourier ataşate funcţiilor $f + F$ şi $f - F$ sunt

$$f(x) + F(x) = \frac{a_0 + A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + A_n)\cos nx + (b_n + B_n)\sin nx]$$

$$f(x) - F(x) = \frac{a_0 - A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - A_n)\cos nx + (b_n - B_n)\sin nx]$$

Deoarece f şi F sunt funcţii de pătrat integrabile, atunci şi $f + F$ şi $f - F$ sunt funcţii de pătrat integrabile.

Egalitatea lui Parseval ne conduce la:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) + F(x)]^2dx = \frac{(a_0+A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + A_n)^2 + (b_n + B_n)^2]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - F(x)]^2dx = \frac{(a_0-A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - A_n)^2 + (b_n - B_n)^2]$$

Scăzând cele două egalităţi obţinem:

$$\frac{4}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = 4\left[\frac{a_0A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n)\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x)dx = \frac{a_0A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n)$$

□

23. Să se demonstreze egalitatea:

$\sec x = \frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(1+\sqrt{2}) + 2\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]\cdot$
$\cdot\cos 4nx$, pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Soluţie. Funcţia $f(x) = \sec x$ verifică pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ condiţiile Teoremei 4.3. Deoarece f este pară avem:

$a_0 = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \frac{8}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{1+t^2})/_0^1 =$
$= \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$

Pentru calculul lui a_n folosim identitatea

$\frac{\cos 4nx}{\cos x} = 2\cos(4n-1)x - 2\cos(4n-3)x + \frac{\cos(4n-1)x}{\cos x}$

De unde integrând obţinem

$a_n = \frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{4n-1}\sin(4n-1)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4n-3}\sin(4n-3)\frac{\pi}{4}\right] + a_{n-1}$

De aici deducem

$a_k - a_{k-1} = \frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{4k-1}\sin(4k-1)\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4k-3}\sin(4k-3)\frac{\pi}{4}\right]$

Insumând obţinem

$a_n = \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4} + a_0$

Aşadar, dezvoltarea în serie Fourier pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ a funcţiei f este

$\sec x = \frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(1+\sqrt{2}) + 2\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]\cdot$
$\cdot\cos 4nx$ □

24. Să se arate că dacă $f(x)$ este suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^2-1}$, atunci f verifică ecuaţia diferenţială $f''(x) + f(x) = -\sin x$ şi să se găsească apoi suma.

Soluţie. Fie $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, atunci

$f'(x) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(nb_n + (-1)^n c)\cos nx - na_n \sin nx]$, unde

$c = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = \lim_{n\to\infty}[(-1)^{n+1} nb_n]$

In cazul nostru $c = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^2}{n^2-1}\right) = -1$

Obţinem $f'(x) = -\frac{1}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$

Făcând un raţionament analog obţinem

$f''(x) = -\sin x - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2-1}$

şi se verifică astfel relaţia din ipoteză .

Pentru calculul sumei observăm că soluţia generală a ecuaţiei este $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x\cos x}{2}$

Pentru a calcula c_1 facem $x = 0$ şi avem $f(0) = c_1$, dar $f(0) = 0$, deci $c_1 = 0$

Derivând f şi ţinând seama de dezvoltarea sa în serie obţinem

$c_2 \cos x + \frac{\cos x}{2} - \frac{x \sin x}{2} = -\frac{1}{2} + \cos x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$

Facem $x = 0$ şi obţinem $c_2 = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{4}$

Deci $f(x) = \frac{\sin x}{4} + \frac{x \cos x}{2}$ □

4.3 Probleme propuse

1. Să se dezvolte în serii Fourier funcţiile:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{dacă } 0 < x \le \pi \\ -\frac{\pi + x}{2}, & \text{dacă } -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi$$

şi să se deducă dezvoltarea în serie trigonometrică a numărului $\frac{\pi}{4}$.

R: $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$$

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},x\in(0,\pi)$$

Să se dezvolte în serii Fourier următoarele funcţii:

2.

$$f(t)=\begin{cases}-t-\pi, & \text{dacă } t\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\\ t, & \text{dacă } t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ -t+\pi, & \text{dacă } t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$$

R: $f(t)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2}\sin nt$

3.

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in(0,\pi)\\ -1, & \text{dacă } x\in(\pi,2\pi)\end{cases}$$

R: $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

4. $f(x)=|\cos x|,x\in(-\pi,\pi)$

R: $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2nx}{4n^2-1}$

5. $f(x)=|\sin\frac{x}{2}|$

R: $f(x)=\frac{2}{\pi}\left(1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{1-4n^2}\right)$

6. $f(x)=\sin\alpha x,x\in(-\pi,\pi),\alpha$ nu e întreg

R: $f(x)=\frac{2\sin\alpha\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\alpha^2-n^2}\sin nx$

7. $f(x)=\frac{\sin x}{5+3\cos x}$

R: $f(x)=\frac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{3^n}$

8. Să se scrie egalitatea lui Parseval pentru funcţia $f(x)=e^x$ pe $(-\pi,\pi)$.

R: $\mathrm{cth}\pi=\frac{1}{\pi}+4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(\pi n^2+1)^2}$

9. Să se dezvolte funcţia $f(x) = 1 - |x|$ definită îi intervalul (0,1):

   a)în serie de cosinusuri;

   b)în serie de sinusuri.

   R: a)$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$

   b)$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi nx}{n}$

10. Să se dezvolte în serie de sinusuri pe $(0.\pi)$ funcţia $f(x) = x(\pi - x)$.

    R: $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$

11. Să se dezvolte în serie de cosinusuri funcţia $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin x$, $x \in [0,\pi]$.

    R: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, x \in [0,\pi]$

12. Să se determine seria Fourier asociată funcţiei periodice de perioadă 4

$$f(x) = \begin{cases} 1+2x, & \text{dacă } x \in (-2,2) \\ -3, & \text{dacă } x = 2 \end{cases}$$

Să se găsească apoi suma $S(x)$,$x \in \mathbb{R}$.

R: $f(x) = 1 + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{2}$

Cum $S(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow S(x) = 1 + 2x, x \in (-2,2)$, $S(2) = 1$

Capitolul 5

Limite şi continuitate pentru funcţii de mai multe variabile

5.1 Noţiuni teoretice

Definiţia 5.1. Fie $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$ şi fie (x_0, y_0) un punct de acumulare pentru mulţimea A. In acest caz $l = \lim\limits_{(x,y)\to (x_0,y_0)} f(x, y)$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ şi $|y - y_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$

Pentru funcţia de două variabile $f(x, y)$ se pot considera limitele iterate : $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$ şi $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$, care, dacă există , nu sunt întotdeauna egale. Dacă există limita globală $l = \lim\limits_{(x,y)\to (x_0,y_0)} f(x, y)$ şi dacă există limitele $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ şi $\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)$, atunci există limitele iterate şi sunt egale cu limita globală l. Dacă limitele iterate nu sunt egale, limita globală nu există . Se poate întâmpla ca limitele iterate să fie egale, fără ca limita globală să existe.

Rezultatele de mai sus pot fi enunţate similar pentru funcţii de p variabile.

Definiţia 5.2. Fie $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^2$ o funcţie de două variabile. Dacă funcţia $f(x, y_0)$ este continuă în punctul x_0,$(x_0, y_0) \in A$, atunci f este continuă parţial în raport cu variabila x. Dacă funcţia $f(x_0, y)$ este continuă în punctul y_0, atunci f este continuă parţial în raport cu variabila y.

Continuitatea funcţiei f implică continuitatea parţială în raport cu fiecare variabilă . Reciproca nu este adevărată .

Definiţia 5.3. Funcţia f este uniform continuă pe A, dacă
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A, |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$,
$|y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$

Orice funcţie uniform continuă pe A este continuă pe A. O funcţie continuă pe o mulţime mărginită şi închisă (compactă) A este uniform continuă pe A.

5.2 Probleme rezolvate

1. Folosind definiţia, să se demonstreze că :

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(3,\infty)} \frac{xy-1}{y+1} = 3;\ b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$$

Soluţie. a) Fiind dat $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x-3| < \delta_\varepsilon$ şi $y > \delta_\varepsilon^{-1}$ să implice $\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| < \varepsilon$.

Avem $\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| = \left|x - 3 - \frac{x+1}{y+1}\right| \leq |x-3| + \left|\frac{x-3}{y+1}\right| + \frac{4}{|y+1|} < \delta_\varepsilon + \frac{\delta_\varepsilon}{y} + \frac{4}{y} <$
$< \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon^2 + 4\delta_\varepsilon < 6\delta_\varepsilon$,cu $0 < \delta_\varepsilon < 1$

Deci dacă impunem $6\delta_\varepsilon < \varepsilon$,adică $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{6}$, definiţia e verificată .

b) Se scrie $x^2 + y^2 = (|x| + |y|)^2 - 2|x||y|$, astfel că , presupunând $|x| < \delta_\varepsilon, |y| < \delta_\varepsilon$ se obţine $\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = |x| + |y| - \frac{2|x||y|}{|x|+|y|} \leq |x| + |y| < 2\delta_\varepsilon$.
Dacă se impune $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$ rezultă că există $\delta_\varepsilon, 0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$ astfel încât $|x| < \delta_\varepsilon, |y| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x,y)| < \varepsilon$, ceea ce arată că definiţia este verificată . □

2. Să se arate, folosind definiţia, că următoarele funcţii nu au limită în origine:

a) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$: b) $f(x,y) = \frac{y^2+2x}{y^2-2x}, y^2 - 2x \neq 0$

Soluţie. a) Vom folosi definiţia cu şiruri, punând în evidenţă şiruri de puncte, convergente către $(0,0)$, situate pe drepte oarecare ce trec prin origine. Ecuaţia unei astfel de drepte este $y = mx$. Dacă funcţia ar admite limită în origine, ar trebui ca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{2x(mx)}{x^2+x^2m^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

Acest fapt arată însă că funcţia nu are limită , pentru că dacă ar avea limită , aceasta nu ar trebui să depindă de şirul folosit (în cazul de faţă nu ar trebui să depindă de m, panta dreptei folosite).

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{m^2x^2+2x}{m^2x^2-2x} = -1$$

De aici nu putem trage concluzia că limita există , deoarece dacă facem ca $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ pe parabola ce trece prin origine , $y^2 = px$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, rezultă că :

$$\lim_{x\to 0, y^2=px} \frac{px+2x}{px-2x} = \frac{p+2}{p-2}$$

Prin urmare, pentru şiruri diferite obţinem limite diferite, deci funcţia nu are limită în origine. □

3. Să se cerceteze limitele iterate şi limita globală în origine pentru următoarele funcţii:

   a) $f(x,y) = \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, x+y \neq 0$; b) $f(x,y) = x \cdot \sin\frac{1}{y}, y \neq 0$;
   c) $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, x \neq 0, y \neq 0$; d) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^4}$

   Soluţie. Limitele iterate sunt:

   a) $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x} = 1$$

   $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y} = -1$$

   şi, deoarece acestea sunt diferite, tragem concluzia că limita globală nu există . Intr-adevăr, avem

   $$\lim_{x\to 0, y=mx} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x-mx+x^2+m^2x^2}{x+mx} = \frac{1-m}{1+m}$$

   ceea ce ne arată că limita globală nu există .

   b) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ nu există , deoarece $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ nu există .

   Totuşi limita globală există şi este egală cu 0.Verificăm cu ajutorul definiţiei. Deoarece $|\sin\frac{1}{y}| \leq 1$, rezultă că pentru $|x| < \delta_\varepsilon, |y| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x,y) - 0| = |x||\sin\frac{1}{y}| \leq |x| < \delta_\varepsilon$ Luând $\delta_\varepsilon < \varepsilon$, definiţia e verificată .

   c) Limitele iterate nu există , deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ şi $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ nu există Limita globală există şi este egală cu 0. Pentru a vedea aceasta observăm că $|\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}| \leq 1$, deci

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$$

   d) $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4} = 0$$

   $$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^4} = 0$$

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y=mx} f(x,y) =$$
   $$= \lim_{x\to 0, y=mx}\frac{m^2x^4}{m^2x^4+(1-m)^4x^4} = \frac{m^2}{m^2+(1-m)^4}$$

   Deci limita nu există deoarece depinde de m. □

4. Să se calculeze limitele:

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin xy}{x}$; c) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x+y}{x^2+y^2}$

Soluţie. a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{\sqrt{u+1}-1} =$
$= \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{(\sqrt{u+1}+1)u}{u} = 2$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot y = 2$

c) Pentru $x > 0$ şi $y > 0$ avem $0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \le \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2}$
şi deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 0$, rezultă
$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 0$ □

5. Să se arate că funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă în origine.

Soluţie. Scriem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Stim că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = 1$

Pentru $|x| < \delta_\varepsilon, |y| < \delta_\varepsilon$ avem $\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x+y||x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2} \le (|x|+$
$+|y|)\left(1 + \frac{|xy|}{x^2+y^2}\right) < 2\delta_\varepsilon\frac{\varepsilon}{2}$, deoarece $2|x||y| < x^2+y^2$

Dacă luăm $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$, definiţia este verificată .

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, rezultă funcţia e continuă în origine. □

6. Să se arate că funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă parţial în origine, dar nu este continuă în acest punct.

Soluţie. Funcţia

$$f(x,0) = \begin{cases} \frac{\sin x^3}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă în $x = 0$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^3}{x^3} \cdot x = 0 =$
$= f(0,0)$

Analog funcţia $f(0,y)$ este continuă în $y=0$.

Dar funcţia $f(x,y)$ nu este continuă în origine, deoarece:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0, y^2=px} \frac{px^2+\sin(x^3+p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}})}{x^2+p^2x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0, y^2=px}\left[\frac{p}{1+p^2}+\frac{\sin(x^3+p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}})}{x^3+p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}}\cdot\frac{x^3+p^{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{x^2+p^2x^2}\right] = \frac{p}{1+p^2}$$ □

7. Să se arate că funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

Soluţie. Fixăm $y=b$. Atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x,b) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2} = f(a,b)$, deci funcţia este continuă în raport cu x.

Fixăm $x=a$. Atunci $\lim\limits_{y\to b} f(a,y) = \dfrac{2ab}{a^2+b^2} = f(a,b)$, deci funcţia este continuă în raport cu y.

Studiem continuitatea în origine :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{2x^2m^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

Limita depinzând de m,funcţia nu e continuă în origine în raport cu ansamblul variabilelor. □

8. Se consideră funcţiile $f,g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^2}$, $g(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pentru $(x,y)\neq(0,0)$ şi nule în origine. Să se arate că f este continuă pe $\mathbb{R}^2$, iar g este continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Soluţie. Funcţiile f şi g sunt continue pe deschisul $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, fiind câturi de polinoame, deci compuneri de funcţii elementare. Rămâne de studiat continuitatea în origine. Deoarece $0\le|f(x,y)|=|x|\frac{y^2}{x^2+y^2}\le$ $\le|x|$, rezultă că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$, deci f este continuă şi în origine.

Pentru g nu mai funcţionează acelaşi raţionament.In acest caz, limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ nu există , deoarece depinde de direcţia de tindere, aşa cum se observă punând $y=mx$ sau altfel: alegem şirurile $(x_n',y_n')=$ $=\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right),(x_n'',y_n'')=\left(\frac{3}{n},\frac{1}{n}\right)$ care tind către $(0,0)$, dar pentru care $g(x_n',y_n')=\frac{3}{5}, g(x_n'',y_n'')=\frac{4}{5}$ nu tind către $g(0,0)=0$. Aşadar g nu este continuă în origine. □

9. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite prin :

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & xy \geq 0 \\ -y, & xy < 0 \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x-y}, & \text{dacă } x \neq y \\ \cos y, & \text{dacă } x = y \end{cases}$$

Soluţie. Pe deschisul $xy > 0$ (adică în cadranele deschise I şi II), avem $f(x,y) = x$, deci f e continuă ; analog pe deschisul $xy < 0$. Rămâne de studiat comportarea lui f în punctele de pe axe. Să fixăm punctul $A(\alpha, 0)$ cu $\alpha > 0$. Alegem şirurile $\left(\alpha, \frac{1}{n}\right)$ şi $\left(\alpha, -\frac{1}{n}\right)$ care tind către A; se observă că $f\left(\alpha, \frac{1}{n}\right) = \alpha \longrightarrow \alpha$ şi $f\left(\alpha, -\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, dar $\alpha \neq 0$. Analog pentru $(\alpha, 0)$ cu $\alpha < 0$.Deci funcţia f nu este continuă în aceste puncte.

Arătăm că f nu e continuă nici în punctele $(0, \beta)$ cu $\beta > 0$ sau $\beta < 0$. Pentru aceasta alegem şirurile $\left(\frac{1}{n}, \beta\right)$ şi $\left(-\frac{1}{n}, \beta\right)$.

Dar f este continuă în $(0,0)$, deoarece pentru orice şir $(x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$, rezultă $x_n \longrightarrow 0, y_n \longrightarrow 0$, deci $f(x_n, y_n) \longrightarrow 0 = = f(0,0)$

Pe deschisul $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\right\}$, funcţia g este elementară , deci continuă ; apoi în punctele (α, α) avem

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{x-y} =$$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \cos\dfrac{x+y}{2} = \cos\alpha = g(\alpha,\alpha)$, deci g este continuă pe $\mathbb{R}^2$ □

Să se studieze continuitatea funcţiilor:

10.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2 + e^{-\frac{2}{x^2}}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluţie. Fie şirurile $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}, \frac{1}{n}\right)$ şi $(x''_n, y''_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}, \frac{1}{n^2}\right)$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = \dfrac{1}{2}, \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n, y''_n) = 0$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există . Aşadar, f e continuă doar pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ □

11.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{xy} \cdot \sin\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluţie. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}}{\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} = 0$, deci funcţia este continuă în origine.

Cum f e continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, fiind compunere de funcţii elementare, rezultă că f e continuă pe $\mathbb{R}^2$. □

12.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluţie. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{x^2+y^2+1}+1) = 2 \neq 0 = f(0,0)$, deci funcţia nu este continuă în origine. □

13.

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soluţie. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left((1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right)^{-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = 1 \neq 0 = f(0,0)$, deci f nu e continuă în origine. □

* 14.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Soluţie. Pentru $x^2+y^2 \neq 0, f$ este continuă , fiind compunere de funcţii continue.

Studiem continuitatea în $(0,0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos 0 - \cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\sin^2\frac{x^3+y^3}{2}}{x^2+y^2} =$

$$= 2 \lim_{(x,y)\to (0,0)} \frac{\sin^2 \frac{x^3+y^3}{2}}{\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2} \cdot (\frac{x^3+y^3}{2})^2 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} =$$

$$= 2 \lim_{(x,y)\to (0,0)} \left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to (0,0)} \frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2}$$

Avem $\left|\frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{(x+y)^2(x^2-xy+y^2)^2}{x^2+y^2}\right| =$
$= \left|(x+y)^2(x^2-xy+y^2)\left(1-\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |(x+y)^2(x^2-xy+y^2)|\cdot$
$\cdot\left(1+\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\right) \leq |(x+y)^2(x^2-xy+y^2)|\cdot(1+\frac{1}{2}) \longrightarrow 0$, când $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ (deoarece $2xy \leq x^2+y^2$)

Aşadar, $\frac{1}{2} \lim\limits_{(x,y)\to (0,0)} \frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2} = 0$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to (0,0)} f(x,y) = 0 =$
$= f(0,0) \Longrightarrow$ funcţia e continuă pe $\mathbb{R}^2$ □

15. Să se arate că funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+x^2y\ln|x+y|}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

este continuă parţial în origine, însă nu e continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acest punct.

Soluţie. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$
$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$
Aşadar, f este continuă parţial în origine.
$\lim\limits_{(x,y)\to (0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0, y=mx} f(x,y) =$
$= \lim\limits_{x\to 0, y=mx} \dfrac{x^2m+mx^3\ln[x(1+m)]}{x^2(1+m^2)} = \dfrac{m}{1+m^2} \Longrightarrow f$ nu este continuă în origine în raport cu ambele variabile □

16. Să se studieze continuitatea în origine a funcţiei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|}{y^2}e^{-\frac{|x|}{y^2}}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

Soluţie. Chiar dacă f e continuă în origine pe dreapta $y=mx$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0, y=mx} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0, y=mx} \dfrac{|x|}{m^2x^2}e^{-\frac{|x|}{m^2x^2}} = 0, \forall m\neq 0$,totuşi f nu e continuă în $(0,0)$ în raport cu ansamblul variabilelor, deoarece pe curba $x=y^2$ avem $\lim\limits_{x\to 0, y^2=x} f(x,y) = \dfrac{1}{e} \neq 0 = f(0,0)$ □

17. Fie $f(x,y) = (f_1, f_2), f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2, f_1(x,y) = x$

$$f(x,y) = \begin{cases} y - x^2, & x^2 \le y \\ 0, & (x,y) = (0,0) \\ \frac{y^2 - x^2 y}{x^2}, & 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea funcţiei f în origine.

Soluţie. Vom studia continuitatea funcţiilor f_1 şi f_2 în origine:

$\lim\limits_{(x,y)\to (0,0)} f_1(x,y) = 0 = f_1(0,0)$

Fie $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, \theta \in [0,\pi]$

$\lim\limits_{(x,y)\to (0,0)} f_2(x,y) = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2 \sin\theta(\sin\theta - \rho\cos^2\theta)}{\rho^2\cos^2} = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$, pentru $0 \le \sin\theta \le \rho\cos^2\theta$

$\lim\limits_{(x,y)\to (0,0)} f_2(x,y) = \lim\limits_{\rho\to 0} (\rho\cos\theta - \rho^2\sin^2\theta) = 0$, pentru $\rho\cos^2\theta \le \sin\theta$

Deci f_2 nu e continuă în origine şi atunci nici f nu va fi continuă în origine. □

18. Să se studieze uniform continuitatea funcţiilor:

a) $f(x,y) = \frac{x}{y}, (x,y) \in (1,2) \times (1,2)$

b) $f(x,y,z) = x^2 + e^y + y\sin z, (x,y,z) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

Soluţie. a) Fiind dat $\varepsilon > 0$ oarecare, trebuie să determinăm $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (1,2) \times (1,2)$ cu $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon, |y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon$ să implice $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$

Dar $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = \frac{|(x_1-x_2)y_2 + x_2(y_2-y_1)|}{y_1 y_2} \le \frac{|x_1-x_2|y_2 + |y_2-y_1|x_2}{y_1 y_2} < \delta_\varepsilon \cdot \frac{x_2+y_2}{y_1 y_2} < 4\delta_\varepsilon < \varepsilon$, pentru $0 < \delta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{4}$, deci funcţia e uniform continuă

b) Deoarece funcţia f este continuă pe mulţimea mărginită şi închisă $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, deci uniform continuă pe această mulţime. □

5.3 Probleme propuse

Să se studieze continuitatea funcţiilor:

1°

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

2.

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & x^2+y^2>1\end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2$

3.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2$

4.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}, & x^2+y^2<1,(x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

R: Continuă pe mulţimea de definiţie

5.

$$f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & x>0 \text{ şi } y>0\\ 1, & x=0 \text{ şi } y=0\end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2$

6.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2$

7.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2$

8.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

9.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

10.
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

R: Continuă pe $\mathbb{R}^2$

11. Să se studieze uniform continuitatea funcţiei
$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}, (x,y) \in (1,2) \times (1,2)$

R: Funcţia este uniform continuă pe $(1,2) \times (1,2)$

Capitolul 6

Derivate parţiale. Diferenţiabilitate

6.1 Noţiuni teoretice

Fie $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $a \in A$ un punct fixat şi $s = (s_1, \dots s_n) \in \mathbb{R}^n$ un versor n-dimensional (adică $\|s\| = 1$). Tripletului (f, a, s) i se poate asocia o funcţie de o singură variabilă reală ,

$$g(t) = f(a + ts) = f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n),$$

definită în vecinătatea originii; mai precis, cum A este deschis şi $a \in A$, există $r > 0$ real astfel încât $B(a, r) \subset A$; atunci pentru orice $t \in (-r, r)$ avem $d(a+ts, a) = \|a+ts-a\| = \|ts\| = |t| \cdot \|s\| = |t| < r$, deci $a+ts \in B(a, r) \subset A$ şi funcţia g este bine definită pe intervalul $(-r, r)$.

Definiţia 6.1. Se spune că funcţia f **este derivabilă în punctul** a **după versorul** s dacă funcţia reală $g\colon (-r, r) \to \mathbb{R}, t \mapsto f(a + ts)$ este derivabilă în punctul $t = 0$ şi în acest caz numărul real $\frac{df}{ds}(a) = g'(0)$ se numeşte **derivata lui** f **după versorul** s **în punctul** a (sau **derivata lui** f **după direcţia** s).

Definiţia 6.2. Fie o funcţie $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis şi $a = (a_1, \dots a_n)$ un punct din A. Se spune că f **este derivabilă parţial în raport cu variabila** x_k **(de indice** k**) în punctul** a dacă există $\frac{df}{de_k}(a), 1 \le k \le n$;acest număr real se numeşte **derivata lui** f **în raport cu** x_k **în punctul** a şi se notează $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ sau $f'_{x_k}(a)$ sau $D_k f(a)$.

Definiţia 6.3. Funcţia f se numeşte **derivabilă parţial în raport cu** x_k **pe deschisul** A dacă în fiecare punct $a \in A$ există $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Aşadar,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \frac{df}{de_k}(a) = \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots a_k + t, \dots a_n) - f(a_1, \dots a_n)}{t}$$

Definiţia 6.4. Funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\colon A \to \mathbb{R}, a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), 1 \le k \le n$ se numesc **derivatele parţiale ale lui f pe A**

Definiţia 6.5. Funcţia f se numeşte **de clasă C^1 pe A** şi se notează $f \in C^1$ dacă f este derivabilă parţial pe A şi, în plus,funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue pe A.

Definiţia 6.6. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis şi $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie cu valori vectoriale. Fie $f_1, \dots f_m$ componentele lui F; aşadar, $f_i\colon A \to \mathbb{R}, 1 \le i \le m$ sunt funcţii astfel încât $F(x) = (f_1(x), \dots f_m(x)), \forall x(x_1, \dots x_n) \in A$. Se spune că aplicaţia F **este derivabilă parţial într-un punct** $a \in A$ dacă fiecare din funcţiile $f_1, \dots f_m$ sunt derivabile parţial în a, în raport cu toate variabilele $x_1, \dots x_n$. In acest caz se poate considera o matrice cu m linii şi n coloane cu coeficienţi reali:

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

numită **matricea jacobiană a lui F în punctul** a. Dacă $m = n$, atunci matricea $J_F(a)$ este pătratică şi determinantul ei se numeşte **jacobianul** sau **determinantul funcţional al funcţiilor $f_1, \dots f_m$ în punctul** a şi se notează $\frac{D(f_1, \dots f_m)}{D(x_1, \dots x_n)}(a) = \det J_F(a)$.

Definiţia 6.7. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ şi $a \in A$. Se spune că aplicaţia F **este diferenţiabilă în punctul** a dacă există o aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,depinzând de a,astfel încât

$$\lim_{x \to a, x \ne a} \frac{F(x) - F(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$

Notând cu $\varphi(x), \varphi\colon A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m$, limita anterioară revine la $F(x) = F(a) + T(x-a) + \|x - a\|\varphi(x), \forall x \in A$ cu $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

Funcţia F se numeşte **diferenţiabilă pe A** dacă este diferenţiabilă în orice punct din A.

Lema 6.1. *Dacă F este diferenţiabilă în punctul a,atunci aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară T este unic determinată .*

Definiţia 6.8. Dacă aplicaţia $F\colon A \to \mathbb{R}^m$,unde $A \subset \mathbb{R}^n$ este un deschis, este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$, atunci aplicaţia $\mathbb{R}$-liniară T se numeşte **diferenţiala lui F în punctul** a şi se notează $dF(a)$.

Teorema 6.1. *Fie $F\colon A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, $a \in A$ şi fie $f_1, \dots f_m$ componentele lui F. Atunci F este diferenţiabilă în punctul a dacă şi numai dacă $f_1, \dots f_m$ sunt diferenţiabile în a şi, în acest caz, diferenţiala $dF(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ are drept componente diferenţialele $df_1(a), \dots df_m(a)$ ca aplicaţii $\mathbb{R}$-liniare de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}$.*

Teorema 6.2. *Fie o funcţie $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ deschis.*

(a) Dacă f este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$, atunci f este continuă în a; în plus,există $\frac{df}{ds}(a)$ pentru orice versor $s \in \mathbb{R}^n$ şi, în particular, există

derivatele parţiale de ordinul I $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, *anume*
$\frac{df}{ds}(a) = df(a)(s)$ *şi* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df(a)(e_k), 1 \leq k \leq n$.

(b) Dacă $f \in C^1(A)$, *atunci* f *este diferenţiabilă pe deschisul* A*;în particular, orice funcţie elementară este diferenţiabilă pe orice deschis din domeniul ei de definiţie.*

Teorema 6.3. ***(formula de calcul al diferenţialei)*** *Fie* $f\colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *deschis o funcţie diferenţiabilă într-un punct* $a \in A$. *Atunci are loc formula*

$$df(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot pr_j \text{ (egalitate de aplicaţii } \mathbb{R}\text{-liniare de la } \mathbb{R}^n \text{ la } \mathbb{R})$$

Teorema 6.4. *Fie* $F\colon A \to B, G\colon B \to \mathbb{R}^l$ *două aplicaţii , unde* $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ *sunt mulţimi deschise. Dacă* F *este diferenţiabilă într-un punct* $a \in A$ *şi* G *este diferenţiabilă în punctul* $b = F(a)$, *atunci funcţia compusă* $G \circ F$ *este diferenţiabilă în* a *şi, în plus,*

$$d(G \circ F)(a) = dG(b) \circ dF(a)$$

In particular, compunerea a două aplicaţii diferenţiabile este de asemenea diferenţiabilă .

Teorema 6.5. *In condiţiile teoremei 6.4, are loc relaţia*

$$J_{G \circ F}(a) = J_G(b) \cdot J_F(a)$$

Caz particular : Fie un **con deschis** $C \subset \mathbb{R}^n$ (adică o submulţime deschisă C astfel încât din ipoteza că $x \in C, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ să rezulte $tx \in C$; de exemplu,$C = \mathbb{R}^n$ este un con deschis; la fel sunt şi mulţimile $\{xy > 0\}$ în $\mathbb{R}^2$ şi $\{x^2+y^2-z^2 < 0\}$ în $\mathbb{R}^3$). Fie $f\colon C \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă pe C, care în plus este **omogenă de grad** r (adică $f(tx) = t^r f(x), \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0, r$ fiind un număr real fixat). In acest caz rezultă relaţia

$$f(\overset{u_1}{tx_1}, \ldots \overset{u_n}{tx_n}) = t^r \cdot f(x_1, \ldots x_n), \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0, \forall x = (x_1, \ldots x_n) \in C$$

Derivând această relaţie în raport cu t,rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(tx) \cdot x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}(tx) \cdot x_n = rt^{r-1} \cdot f(x)$$

şi făcând $t = 1$ se obţine o relaţie remarcabilă în punctul curent din C, anume

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = r \cdot f(x_1, \ldots x_n)$$

numită **formula lui Euler pentru funcţii omogene**.

Teorema 6.6. *Fie $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis o funcţie diferenţiabilă într-un punct $a \in A$. Pentru orice versor $s = (s_1, \dots s_n) \in \mathbb{R}^n$ avem*

$$\frac{df}{ds}(a) = s_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + s_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Teorema 6.7. *Fie $f, g\colon A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis , două funcţii diferenţiabile într-un punct $a \in A$. Atunci $f + g, \lambda f (\lambda \in \mathbb{R}), fg, \frac{f}{g}(g(x) \neq 0, \forall x \in A)$ sunt diferenţiabile în a şi în plus:*

$$(a) \frac{\partial}{\partial x_k}(f + g)(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \frac{\partial g}{\partial x_k}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\lambda f)(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(fg)(a) = f(a)\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) + g(a)\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\frac{\partial f}{\partial x_k} - f(a)\frac{\partial g}{\partial x_k}}{g(a)^2}$$

$$(b) \frac{d}{ds}(f + g)(a) = \frac{df}{ds}(a) + \frac{dg}{ds}(a)$$

$$\frac{d}{ds}(\lambda f)(a) = \lambda \frac{df}{ds}(a)$$

$$\frac{d}{ds}(fg)(a) = f(a)\frac{dg}{ds}(a) + g(a)\frac{df}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\frac{df}{ds}(a) - f(a)\frac{dg}{ds}(a)}{g(a)^2}$$

$$(c) d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$$

$$d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$$

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g(a)^2}$$

Definiţia 6.9. Fie $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis. Funcţia f se numeşte **de clasă** $C^0(A)$ dacă este continuă pe A; **de clasă** $C^1(A)$ (sau **continuu diferenţiabilă pe** A) dacă este continuă pe A şi derivabilă parţial în fiecare punct din A, iar funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_k}\colon A \to \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n$ sunt continue pe A; **de clasă** $C^2(A)$ dacă $f \in C^1(A)$ şi toate derivatele $\frac{\partial f}{\partial x_k}, 1 \leq k \leq n$ sunt funcţii de clasă $C^1(A)$, adică pentru orice $1 \leq j, k \leq n$, există $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ în fiecare punct din A şi acestea sunt funcţii continue pe A.

Teorema 6.8. ***(H.A.Schwarz)*** *Fie $f\colon A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, f de clasă $C^2(A)$. Atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$, în orice punct a şi pentru orice j, k $(1 \leq j, k \leq n)$.*

6.2 Probleme rezolvate

1. Pornind de la definiţie, să se calculeze:

   a) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$,dacă $f(x,y)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y}$

   b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1), \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)$,dacă $f(x,y)=xy\ln x, x\neq 0$

   Soluţie. a) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x,0)-f(\frac{\pi}{4},0)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=$
   $=\frac{\sqrt{2}}{2}$

   $$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{2}}-1}{y-\frac{\pi}{4}}=\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\sin y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{2}}+1\right)}=$$
   $$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin y-\sin\frac{\pi}{4}}{y-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

   b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1,1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,1)-\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}{x-1}$,
   unde $\frac{\partial f}{\partial y}(x,1)=\lim\limits_{y\to 1}\frac{f(x,y)-f(x,1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{xy\ln x-x\ln x}{y-1}=x\ln x$
   şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\lim\limits_{y\to 1}\frac{f(1,y)-f(1,1)}{y-1}=0$, deci
   $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1}=-1$
   Analog $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)=\lim\limits_{y\to 1}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)}{y-1}=1$ □

2. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y)=x^2-y^2+xy$ în punctul $M(2,2)$, după direcţia l, care face cu direcţia pozitivă a axei Ox un unghi de 30^0.

   Soluţie. Cosinusurile directoare ale direcţiei l sunt $\cos\alpha=\cos 30^0=$
   $=\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\cos\beta=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Cum $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y+x$ avem $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)=6$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)=$
   $=-2$. Atunci $\frac{df}{dl}=6\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}$ □

3. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y,z)=\frac{1}{r}, r\neq 0, \overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+$
   $+z\overrightarrow{k}$ într-un punct $M(x,y,z)$, după direcţia gradientului său.

   Soluţie. Putem scrie $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
   Avem $\text{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=-\frac{1}{r^3}\overrightarrow{r}$ şi $|\text{grad} f|=\frac{1}{r^2}$, deci

$\cos\alpha = -\frac{x}{r}, \cos\beta = -\frac{y}{r}, \cos\gamma = -\frac{z}{r}$. Prin urmare, $\frac{df}{dl} = -\frac{x}{r}\cdot\left(-\frac{x}{r^3}\right) - -\frac{y}{r}\cdot\left(-\frac{y}{r^3}\right) - \frac{z}{r}\cdot\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{1}{r^2}$ □

4. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I pentru următoarele funcţii:

   a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; b) $f(x,y,z) = \ln x^y y^z z^x, x>0, y>0, z>0$; c) $f(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, x^2+y^2+z^2 \neq 0$

Soluţie. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + (x^2+y^2)\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = 2x\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + (x^2+y^2)\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - x$

b) Scriem $f(x,y,z) = y\ln x + z\ln y + x\ln z$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + \ln z$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln x + \frac{z}{y}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \ln y + \frac{x}{z}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = yz\cdot\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = yz\cdot\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Funcţia f fiind simetrică în raport cu x, y, z rezultă

$\frac{\partial f}{\partial y} = zx\cdot\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = xy\cdot\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ □

5. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul II pentru funcţiile următoare:

   a) $f(x,y) = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0)$

   b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

   c) $f(x,y,z) = y\sin(x+z)$

Soluţie. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} = -\frac{|y|}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{-\frac{xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} = \frac{x\cdot\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2}$, unde $\operatorname{sgn}y = \frac{|y|}{y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2xy\operatorname{sgn}y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\operatorname{sgn}y - 2x^2\operatorname{sgn}y}{x^2+y^2} = -\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn}y}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{(x^2+y^2)\text{sgn}y - 2y|y|}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2-y^2)\text{sgn}y}{(x^2+y^2)^2}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4y(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-4y}{(x+y)^3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x}{(x+y)^3}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(x+z), \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x+z), \frac{\partial f}{\partial z} = y\cos(x+z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y\sin(x+z), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -y\sin(x+z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(x+z), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -y\sin(x+z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \cos(x+z)$ □

6. Se numeşte **potenţial al sferei** $x^2+y^2+z^2-a^2=0$, funcţia

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3}(x^2+y^2+z^2), & x^2+y^2+z^2 < a^2 \\ \frac{4\pi a}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, & x^2+y^2+z^2 \geq a^2 \end{cases}$$

Să se verifice că $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ia valoarea -4π şi 0 după cum punctul $M(x,y,z)$ se află în interiorul sau exteriorul sferei.

Soluţie. Pentru $x^2+y^2+z^2 < a^2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow M \in$interiorului sferei $\Longrightarrow f(x,y,z) = 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3}(x^2+y^2+z^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3}x, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4\pi}{3}y, \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4\pi}{3}z, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{3} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \Delta f = -4\pi$

Pentru $x^2+y^2+z^2 \geq a^2 \Longrightarrow M \in$ exteriorului sferei $\Longrightarrow f(x,y,z) =$
$= \frac{4\pi a}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4\pi a x}{3\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4\pi a y}{3\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4\pi a z}{3\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{2x^2 3(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$
$= \frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow \Delta f = 0$ □

7. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcţiile:

a) $f(u,v) = \ln(u^2+v)$,unde $u = e^{x+y^2}$ şi $v = x^2+y$

b) $f(u,v) = \text{arctg}\,\frac{u}{v}$, unde $u = x\sin y$ şi $v = x\cos y$

Soluţie. a) După regula de derivare a funcţiilor compuse avem:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v} \cdot e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} \cdot 2x = \frac{1}{u^2+v} \cdot (u^2 + x)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v} \cdot 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} \cdot 1 = \frac{1}{u^2+v} \cdot (4u^2y + 1)$
b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2} \cdot \sin y - \frac{u}{u^2+v^2} \cdot \cos y = \frac{1}{x}(\cos y \cdot \sin y - \sin y \cdot \cos y) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{v}{u^2+v^2} \cdot x \cdot \cos y + \frac{u}{u^2+v^2} \cdot x \cdot \sin y = \frac{1}{x} \cdot \cos y \cdot x \cdot \cos y + \frac{1}{x} \cdot \sin y \cdot x \cdot \sin y =$
$= \cos^2 y + \sin^2 y = 1$ $\square$

8. Să se arate că funcţia $z(x, y)$ definită de relaţia $\Phi(x - az, y - bz) =$ $= 0, a, b \in \mathbb{R}$ verifică ecuaţia $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

Soluţie. Notăm $\alpha = x - az, \beta = y - bz$.
Avem $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\left(1 - a\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$
$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\left(-a\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\left(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$
Rezultă $\frac{\partial z}{\partial x}\left(a\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$
$\frac{\partial z}{\partial y}\left(a\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$
Inlocuim $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ în ecuaţia dată şi obţinem
$a\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}}{a\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}} + b\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}}{a\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}} = 1$ adevărat în ipoteza $a\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + b\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \neq 0$ $\square$

9. Să se arate că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:
a) $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ verifică ecuaţia $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$
b) $f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2)$ verifică ecuaţia $xz\frac{\partial f}{\partial x} - yz\frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 -$ $-y^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$

Soluţie. a) Considerăm funcţia $u(x, y) = \frac{y}{x}$ şi obţinem:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(u) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(u) \cdot \frac{1}{x}$
Deci $x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{x} \cdot \varphi' + \frac{y}{x} \cdot \varphi' = 0$
b) Introducem funcţiile $u(x, y, z) = xy$ şi $v(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$
Atunci avem:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$
$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -2z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}$

Astfel $xz\frac{\partial f}{\partial x} - yz\frac{\partial f}{\partial y} + (x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z} = xz(y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + 2x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}) - yz(x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+$
$+2y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}) - 2z(x^2-y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$ □

10. Să se arate că dacă $f(x,y,z) = \frac{xy}{z}\ln x + x\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right), x>0, z\neq 0$ şi $\varphi(u,v)$ este o funcţie de două variabile ce admite derivate parţiale de ordinul I, atunci avem $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{xy}{z} - f(x,y,z) = 0$

Soluţie. Notăm $u=\frac{y}{x}$,$v=\frac{z}{x}$ şi calculăm derivatele de ordinul I

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}(\ln x+1) + \varphi(u,v) - \frac{y}{x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{z}{x}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{z}\ln x + \frac{\partial\varphi}{\partial u}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}\ln x + \frac{\partial\varphi}{\partial v}$

Atunci $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{xy}{z} - f(x,y,z) = \frac{xy}{z}(\ln x+1) + x\varphi(u,v)-$
$-y\frac{\partial\varphi}{\partial u} - z\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{xy}{z}\ln x + y\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{xy}{z}\ln x + z\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z}\ln x - x\varphi(u,v) =$
$=0$ □

11. Să se arate că dacă φ şi ψ sunt funcţii de două ori derivabile, atunci funcţia $f(x,y) = y^n\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{1-n}\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ verifică relaţia
$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f$

Soluţie. Notăm $u=\frac{x}{y}$ şi calculăm derivatele de ordinul I şi II:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{n-1}\frac{d\varphi}{du} + y^{-n}\frac{d\psi}{du}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -xy^{n-2}\frac{d\varphi}{du} + ny^{n-1}\varphi(u) - xy^{n-1}\frac{d\psi}{du} + (1-n)y^{-n}\psi(u)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^{n-2}\frac{d^2\varphi}{du^2} + y^{n-1}\frac{d^2\psi}{du^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -xy^{n-3}\frac{d^2\varphi}{du^2} + (n-1)y^{n-2}\frac{d\varphi}{du} - xy^{-n-2}\frac{d^2\varphi}{du^2} - ny^{-n-1}\frac{d\psi}{du}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2y^{n-4}\frac{d^2\varphi}{du^2} - (n-2)xy^{n-3}\frac{d\varphi}{du} - nxy^{n-3}\frac{d\varphi}{du} + n(n-1)y^{n-2}\varphi(u)+$
$+x^2y^{-n-3}\frac{d^2\psi}{du^2} + (n+1)xy^{-n-2}\frac{d\psi}{du} - (1-n)xy^{n-2}\frac{d\psi}{du} + n(n-1)y^{-n-1}\psi(u)$

Inlocuind avem:

$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (x^2y^{n-2} - 2x^2y^{n-2} + x^2y^{n-2})\frac{d^2\varphi}{du^2} + (x^2y^{-n-1}-$
$-2x^2y^{-n-1} + x^2y^{-n-1})\frac{d^2\psi}{du^2} + [2(n-1)xy^{n-1} - 2nxy^{n-1} - (n-2)xy^{n-1}]\frac{d\varphi}{du}+$
$+[-2nxy^{-n} + (n+1)xy^{-n} + (n-1)xy^{-n}]\frac{d\psi}{du} + n(n-1)y^n\varphi(u) + n(n-$
$-1)y^{n-1}\psi(u) = n(n-1)\left[y^n\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y^{1-n}\psi\left(\frac{x}{y}\right)\right]$ □

12. Fie funcţia $g = x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$ cu f de clasă C^2,$x\neq 0, y\neq 0$.Să se determine f dacă g nu depinde de x.

Soluţie. Condiţia ca g să nu depindă de x este $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.
Notăm $\alpha = \frac{y}{x}$, deci $g = x \cdot f(\alpha)$.
Atunci $\frac{\partial g}{\partial x} = f(\alpha) + x \cdot f'(\alpha) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} = f(\alpha) + x \cdot f'(\alpha) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = f(\alpha)-$
$-\alpha \cdot f'(\alpha)$

Relaţia $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ revine la $f(\alpha) - \alpha \cdot f'(\alpha) = 0$, deci $\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{1}{\alpha}$ şi rezultă că $\ln|f(\alpha)| = \ln|\alpha| + \ln C$. Aşadar $f(\alpha) = C \cdot \alpha$, unde C este o constantă arbitrară . □

13. Să se calculeze diferenţialele de ordinul I şi II pentru funcţiile:

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y$, b) $f(x,y,z) = xyz$

Soluţie. a) $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \mathrm{e}^x \cos y dx - \mathrm{e}^x \sin y dy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\mathrm{e}^x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y$

$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = \mathrm{e}^x \cos y dx^2 - 2\mathrm{e}^x \sin y dx dy-$
$-\mathrm{e}^x \cos y dy^2$

b) $df = yzdx + xzdy + xydz$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y$

$d^2 f = 2zdxdy + 2xdydz + 2ydxdz$ □

14. Să se arate că pentru $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ avem $d^2 f > 0, \forall (x,y,z) \neq$
$\neq (0,0,0)$.

Soluţie. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Datorită simetriei funcţiei f rezultă $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{-2xy}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{-zx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$d^2 f = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} [(y^2+z^2)dx^2 + (z^2+x^2)dy^2 + (x^2+y^2)dz^2 - 2xydxdy-$
$-2yzdydz - 2zxdzdx] = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} [y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2 + z^2dy^2-$
$-2yzdydz + y^2dz^2 + x^2dz^2 - 2zxdzdx + z^2dx^2] = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} [(ydx-$
$-xdy)^2 + (zdy - ydz)^2 + (xdz - zdx)^2] \Longrightarrow d^2 f > 0, \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)$
□

15. Să se calculeze derivatele parţiale şi diferenţiala de ordinul n pentru funcţia $f(x,y) = e^{ax+by}$.

Soluţie. Putem scrie $f(x,y) = e^{ax}e^{by}$ astfel că $\frac{\partial^k f}{\partial x_k} = a^k e^{ax}e^{by}$ şi $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = a^k b^{n-k} e^{ax}e^{by} = a^k b^{n-k} f$

$d^n f = [a^n(dx)^n + C_n^1 a^{n-1} b(dx)^{n-1}dy + \ldots + C_n^n b^n (dy)^n] f = e^{ax+by}(adx+$
$+bdy)^n$ □

16. Folosind diferenţiala unei funcţii de mai multe variabile, să se calculeze $\sqrt[3]{(1,04)^3 + (1,96)^3}$.

Soluţie. Considerăm funcţia $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$
Avem $f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, deci
$\sqrt[3]{x^3+y^3} \simeq \sqrt[3]{x_0^3+y_0^3} + \frac{x_0^3}{\sqrt[3]{(x_0^3+y_0^3)^2}}(x - x_0) + \frac{y_0^3}{\sqrt[3]{(x_0^3+y_0^3)^2}}(y - y_0)$
Dacă luăm $x = 1,04, y = 1,97, x_0 = 1, y_0 = 2$ şi facem calculele, găsim:
$\sqrt[3]{(1,04)^3 + (1,96)^3} \simeq 1,94$ □

17. Fie funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se demonstreze că f este continuă , are derivate parţiale de ordinul întâi şi nu este diferenţiabilă în origine.

Soluţie. Avem $|f(x,y)| \leq |x|$, deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Rezultă că f este continuă .

Evident că în orice punct $(x,y) \neq (0,0)$ funcţia are derivate parţiale de ordinul întâi. Studiem existenţa lor în origine cu definiţia:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0$.Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Demonstăm că f nu e diferenţiabilă în origine.Dacă ar fi , atunci ar trebui ca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0, \text{ dar}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0, y=mx} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} \neq 0$$ □

18. Fie funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se arate că f este diferenţiabilă în origine şi nu este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie. Calculăm derivatele parţiale de ordinul I:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Evident că derivatele parţiale de ordinul I sunt continue în orice punct $(x,y) \neq (0,0)$, dar în origine nu sunt continue, deoarece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ nu există (se folosesc coordonatele polare). Aşadar, f nu e de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

Studiem diferenţiabilitatea în origine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

Rezultă că f e diferenţiabilă în origine. □

19. Fie funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Să se arate că f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$;

(b) Să se arate că f are derivate parţiale mixte de ordinul II în orice punct şi să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ în origine; este funcţia f de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$?

Soluţie. (a) Derivatele parţiale de ordinul I sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\sin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x \sin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^2x^3}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Rezultă că $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, deci f e de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$.

(b) Evident funcţia are derivate parţiale de ordinul II în orice punct $(x,y) \neq (0,0)$. Studiem existenţa derivatelor mixte în origine cu definiţia:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin 1}{x} = \sin 1; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{y \sin(-1)}{y} = -\sin 1$$

Funcţia nu este de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{R}^2$; dacă ar fi fost, atunci, cf. Teoremei 6.8, cele două derivate mixte de ordinul II ar fi trebuit să fie egale. □

20. Fie

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se arate că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nu este continuă în origine, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ şi să se calculeze diferenţiala de ordinul II în origine.

Soluţie. $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot$
$\cdot \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-y^4)-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{(5x^4-y^4-12x^2y^2)(x^2+y^2)^2-(x^5-xy^4-4x^3y^2)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} =$
$= \frac{x^6-y^6+9x^4y^2-9x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$, pentru $(x,y) \neq (0,0)$

Cu definiţia, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$, unde

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$ şi

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{y} = x,$

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

Aşadar,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6-y^6+9x^4y^2-9x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Studiem continuitatea funcţiei $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ în $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \lim_{x \to 0, y=mx} \frac{x^6 - y^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0, y=mx} \frac{x^6 - m^6x^6 + 9x^4m^2x^2 - 9x^2m^4x^4}{(x^2+m^2x^2)^3} =$$

$= \frac{1-m^6+9m^2-9m^4}{(1+m^2)^3} \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, deci funcţia $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ nu este continuă în punctul $(0,0)$

Calculăm $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$, unde

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{y} = 0$ şi

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{x} = -y$,

deci $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{0-y} = -1$

Aşadar, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

Avem $d^2 f(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)dydx +$
$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)dy^2$, unde

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0}$ şi

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(x,0)}{x} = 0$, deci $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$

Analog $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$

Atunci $d^2 f(0,0) = dxdy - dydx = 0$ □

21. Să se calculeze jacobienii transformărilor în coordonate polare, cilindrice şi sferice.

Soluţie. Legătura între coordonate polare şi carteziene $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$ defineşte, ca transformare punctuală , aplicaţia
$F \colon D \to \mathbb{R}^2, F(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, unde
$D = \{(\rho,\theta)/\rho \geq 0, \theta \in [0,2\pi)\}$

Rezultă $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \det J_F = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$

Pentru coordonate sferice $x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta$, $\rho \geq 0, \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi)$, jacobianul este

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$
$= \rho^2 \sin\theta$

Pentru coordonatele cilindrice $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z$ avem $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$ □

22. Să se determine matricea jacobiană a aplicaţiei
$F \colon \mathbb{R}^3 \setminus \{z \leq 0\} \to \mathbb{R}^2, F(x,y,z) = (xy^2, y\ln z)$ în punctul curent.

Soluţie. Componentele lui F sunt $f_1(x,y,z) = xy^2$ şi $f_2(x,y,z) =$ $= y\ln z$ şi $J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & \ln z & \frac{y}{x} \end{pmatrix}$ $\square$

23. Să se determine funcţiile $z = z(x,y)$ care verifică ecuaţia cu derivate parţiale $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, folosind schimbarea de variabile $(x,y,z) \longmapsto (u,v,w)$, unde $u = x, v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$

Soluţie. O metodă constă în a calcula mai întâi x,y,z în funcţie de u,v,w. Se obţine $x = u, y = \frac{u}{uv+1}, z = \frac{u}{uw+1}$. Se calculează acum derivatele parţiale ale lui u,v în raport cu x,y:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = -\left(\frac{uv+1}{u}\right)^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{uw+1}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{uw+1}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{uw+1}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1-u^2\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v}}{(uw+1)^2}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{uw+1}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{uw+1}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{uw+1}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{uv+1}{uw+1}\right)^2\frac{\partial w}{\partial v}$

Inlocuind în ecuaţia iniţială obţinem $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$. Rezultă că w este o funcţie constantă în raport cu variabila u, deci $w = f(v)$, unde f este o funcţie arbitrară de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$.Rezultă $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$, deci $z(x,y) = \frac{x}{1+xf\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)}$

O altă metodă constă în a calcula $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x^2}, \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}$, deci $\frac{\partial z}{\partial x} = -z^2\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z^2}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -z^2\frac{\partial w}{\partial y}$. Se calculează apoi $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} +$ $+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$,etc. $\square$

6.3 Probleme propuse

1. Pornind de la definiţie să se calculeze:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, dacă $f(x,y) = e^{\sin xy}$;

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$, dacă $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$, dacă $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$;

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,2), \frac{\partial f}{\partial y}(-2,2)$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,2)$, dacă $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$;

e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, dacă $f(x,y) = x\sin(x+y)$

f) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2)$, dacă $f(x,y) = 2x^2 + xy$

R: a) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{3}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2}{3}$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,2) = -\frac{2}{3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,2) = \frac{1}{3}$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2) = -\frac{1}{9}$

e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

f) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 5$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = 3$

2. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, în punctul $M(2,1,3)$, după direcţia $\overrightarrow{MN}$, unde $N(5,5,15)$.

R: Cosinusurile directoare ale direcţiei $\overrightarrow{MN}$ sunt $\cos\alpha = \frac{3}{13}, \cos\beta =$ $= \frac{4}{13}, \cos\gamma = \frac{12}{13}$. Obţinem $\frac{df}{dl} = \frac{68}{13}$

3. Fie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy)$ şi fie $h =$ $= (1,2,1)$. Să se calculeze derivata după direcţia h a funcţiei f în punctul $(1,1,2)$.

R: $\frac{df}{dh}(1,1,2) = (-3,1,1)$

4. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y) = 5x^2 - 3x - y - 1$, în punctul $M(2,1)$, după direcţia $\overrightarrow{MN}$, unde $N(5,5)$.

R: Avem $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5}$, deci $\frac{df}{dl} = \frac{47}{5}$

5. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y,z) = 2x^3 - 3y^2 + 6xyz$, în punctul $M(1,1,0)$,după direcţiile axelor de coordonate, apoi după direcţia $\overrightarrow{MN}$,$N(4,-2,3)$.

R: După direcţia $\overrightarrow{MN}$:

$\cos\alpha = -\cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $\frac{df}{dl} = 6\sqrt{3}$

6. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y,z) = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, în punctul $M(1,1,1)$,după direcţia $\overrightarrow{MN}$, unde $N(2,3,-2)$.

R: $\frac{df}{dl} = -\frac{9\sqrt{14}}{14}$

7. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, în punctul $M(1,1,1)$, după direcţia $l(1,1,1)$

R: $\frac{df}{dl} = 2\sqrt{2}$

8. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi pentru următoarele funcţii:

a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$; b) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$;
c) $f(x,y) = xy\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, xy \neq 1$; d) $f(x,y,z) = x^{y^z}, x,y > 0$

R: a) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x-y^2}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin^2 z e^{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\sin^2 z e^{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial z} = 2\sin z\cos z e^{x^2+y^2}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + xy\frac{1+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = x\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + xy\frac{1+x^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$
d) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} zy^{z-1}\ln x, \frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} y^z \ln x \ln y$

9. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi pentru următoarele funcţii:
a) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$; b) $f(x,y) = x^3+xy$; c) $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$
R: a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$
b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 1$
c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} = -\frac{1}{(x+y+z)^2}$

10. Fie $\Delta^* f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ şi $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (numit **operatorul lui Laplace** sau **laplacianul funcţiei** f) . Să se calculeze $\Delta^* f$ şi Δf pentru funcţiile:
a) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$; b) $g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
R: a) $\Delta^* f = 9[(x^2-yz)^2+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2]$ şi $\Delta f = 6(x+y+z)$
b) $\Delta^* g = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ şi $\Delta g = 0$

11. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ pentru $f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$, unde:
a) $f = \varphi(u,v), u(x,y) = x+y, v(x,y) = x^2+y^2$
b) $f = \varphi(u,v), u(x,y) = x^2-y^2, v(x,y) = e^{xy}$
R: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2x\frac{\partial \varphi}{\partial v}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y\frac{\partial f\varphi}{\partial v}$
b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\frac{\partial \varphi}{\partial u} + yv\frac{\partial \varphi}{\partial v}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y\frac{\partial \varphi}{\partial u} + xv\frac{\partial \varphi}{\partial v}$

12. Fie $f = f(u,v)$, unde $u = xy, v = \frac{x}{y}$. Să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
R: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{u}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{v}{u}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{v^2}{u}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial f}{\partial v}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = uv\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2v^2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + \frac{v^2}{u}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{2v^2}{u}\frac{\partial f}{\partial v}$

13. Să se calculeze expresia $E = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, dacă $f(u,v) =$ $= \ln(u^2+v^2)$, unde $u(x,y) = xy$ şi $v(x,y) = x^2-y^2$.
R: $E = [-6(x^6-2x^4y^2-2x^2y^4+y^6)+4xy(x^4+y^4-4x^2y^2)]\cdot$ $\cdot(x^4+y^4-x^2y^2)^{-2}$

14. Să se calculeze $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,dacă $f = f(u, v)$, unde $u(x, y) = x^2 + y^2$ şi $v(x, y) = xy$

R: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial u}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xy(4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}) + 2(x^2 + y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} 4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial u}$

15. Să se arate că funcţia $f(x, y) = \varphi(x - ay) + \psi(x + ay)$, unde funcţiile φ şi ψ admit derivate de ordinul doi, satisface ecuaţia coardei vibrante $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

16. Să se arate că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:

a) $f(x, y) = y\varphi(x^2 - y^2), \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} f$

b) $f(x, y) = \mathrm{e}^y \varphi\left(y\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2y^2}}\right), (x^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} = xyf$

c) $f(x, y) = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\psi\left(\frac{y}{x}\right), x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

d) $f(x, y) = xy\varphi(x^2 - y^2), xy^2 \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2) f$

17. Să se arate că funcţia $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$, unde φ, ψ sunt funcţii de două ori derivabile, verifică ecuaţia:

$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - x\psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

18. Să se calculeze diferenţialele de ordinul I şi II pentru funcţia $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

R: $df = -\sin(x+2y+3z)dx - 2\sin(x+2y+3z)dy - 3\sin(x+2y+3z)dz$

$d^2 f = -\cos(x + 2y + 3z)(dx + 2dy + 3dz)^2$

19. Să se calculeze diferenţialele de ordinul I şi II pentru funcţiile compuse:

a) $F(t) = f(t^2, \ln t), t > 0$;

b) $G(x, y) = g\left(x^2, \frac{x}{y}\right), y \neq 0$;

c) $H(x, y, z) = h(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$

d) $u(x, y, z) = l(x^y, y^z, z^x), x, y, z > 0$

R: a) Notăm $u = t^2, v = \ln t$ şi avem $dF = \left(2t\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial v}\right) dt$

$d^2 F = \left(4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{t^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{t^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right) dt^2$

b) Notăm $u = x^2, v = \frac{x}{y}$ şi obţinem:

$dG = \left(2x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v}\right) dx - \frac{x}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v} dy$

$d^2G = \left(4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 4\frac{x}{y}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2\frac{\partial g}{\partial u}\right) dx^2 + 2(2\frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} +$
$+\frac{1}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v})dxdy + \left(\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial g}{\partial v}\right) dy^2$

c) Notăm $u = x + y + z, v = x^2 + y^2 + z^2$ şi avem:
$dH = \frac{\partial h}{\partial u}(dx + dy + dz) + 2\frac{\partial h}{\partial v}(xdx + ydy + zdz)$

$d^2H = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(dx+dy+dz)^2+4\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}(xdx+ydy+zdz)^2+4\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v}[xdx^2+ydy^2+$
$+zdz^2+(x+y)dxdy+(y+z)dydz+(z+x)dzdx]+2\frac{\partial h}{\partial v}(dx^2+dy^2+dz^2)$

d) Notăm $\alpha = x^y, \beta = y^z, \gamma = z^x$ şi avem
$du = \frac{\partial l}{\partial \alpha}(yx^{y-1}dx+x^y \ln x dy)+\frac{\partial l}{\partial \beta}(zy^{z-1}dy+y^z \ln y dz)+\frac{\partial l}{\partial \gamma}(z^x \ln z dx+$
$+xz^{x-1}dz)$

20. Folosind diferenţiala unei funcţii de mai multe variabile, să se calculeze $(1,03)\cdot(2,02)^2\cdot(3,05)^3$.

    R: Se consideră funcţia $f(x,y,z) = xy^2z^3, x = 1,03, y = 2,02, z =$ $= 3,05, x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3$.Atunci $(1,03)\cdot(2,02)^2\cdot(3,05)^3 \simeq 118,8$

21. Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2-1}, & \text{dacă } x^2+y^2 \neq 1 \\ 0, \text{ dacă } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

    R: f este diferenţiabilă în puncte de forma $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, deci pe $\mathbb{R}^2$, cf. Teoremei 6.2.

22. Să se determine matricea jacobiană a aplicaţiei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x + y^2, xe^y)$.

    R: $J_F = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}$

Capitolul 7

Extremele locale ale funcţiilor de mai multe variabile. Funcţii implicite. Extreme cu legături

7.1 Noţiuni teoretice

Definiţia 7.1. Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punct $a \in A$ se numeşte **punct de extrem local al lui** f dacă există o bilă $B(a, r) \subset A$ unde diferenţa $f(x) - f(a)$ are semn constant; mai precis, punctul $a = (a_1, \dots, a_n)$ se numeşte **punct de minim** (respectiv **maxim**)**local al lui** f dacă pentru orice punct $x = (x_1, \dots, x_n)$ din acea bilă avem $f(x) \geq f(a)$ (respectiv $f(x) \leq f(a)$).

Definiţia 7.2. Un punct $a \in A$ se numeşte **punct critic** (sau **staţionar**) pentru funcţia f dacă f este funcţie diferenţiabilă în punctul a şi , în plus, $df(a) = 0$.

Teorema 7.1. *(teorema lui Fermat) Dacă funcţia f este diferenţiabilă într-un punct $a \in A$, care este punct de extrem local al lui f, atunci acest punct este critic pentru f.*

Observaţia 7.1. Reciproca teoremei 7.1. este falsă . De exemplu,luăm $A = \mathbb{R}^2$,$f(x, y) = xy$ şi $a = (0, 0)$. Evident $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, deci $df(a) =$ $= 0$, adică a este punct critic pentru f. Dar diferenţa $f(x, y) - f(0, 0) = xy$ nu are semn constant în nici o bilă centrată în origine, adică $(0, 0)$ nu e punct de extrem local pentru f.

Corolarul 7.1. *Dacă f este o funcţie de clasă C^1 pe un deschis $A \subset \mathbb{R}^n$, atunci extremele locale ale lui f în A se află printre soluţiile situate*

în A, ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

In continuare, vom da condiţii suficiente de extrem (Teorema 7.1 şi Corolarul 7.1 dau numai condiţii necesare de extrem!). In prealabil este necesar analogul multidimensional al formulei lui Taylor.

Dacă $f\colon A \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă $C^p(A)$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi dacă fixăm un punct $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, se notează $T_a(x) = (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a), \forall x \in A$. Fie $[T_a(x)]^{(k)}$, $2 \le k \le p$, **puterea simbolică a polinomului** $T_a(x)$, obţinută aplicând formula tip binomul lui Newton, cu convenţia de a înlocui $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^k$ cu $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(a)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ cu $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^{k-1}\partial x_j}(a)$ etc.

Teorema 7.2. *(formula lui Taylor) Fie f, A, a ca mai sus. Alegem $r > 0$ astfel încât $B(a,r) \subset A$. Atunci pentru orice $x \in B(a,r)$ există un punct $\xi \in [a,x]$ astfel încât*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^{(2)} + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{(p-1)} + \frac{1}{p!}[T_a^*(x)]^{(p)},$$

unde în puterea simbolică $[T_a^*(x)]^{(p)}$, derivatele de ordin p sunt calculate în punctul ξ.

Observaţia 7.2. Formula din Teorema 7.2 este numită uneori **dezvoltare până la ordinul $p-1$ a lui f în jurul punctului a** (sau **după puterile lui $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$**).

Observaţia 7.3. Fie f o funcţie de clasă C^∞ într-o vecinătate a unui punct $a \in \mathbb{R}^n$; funcţiei f i se poate asocia "seria Taylor" în punctul a $\sum_{p \ge 0} \frac{1}{p!}[T_a(x)]^{(p)} = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^{(2)} + \ldots$. Dacă această serie este punctual convergentă şi are suma $f(x)$ în vecinătatea lui a, se spune că f este **analitică reală în punctul** a. Funcţiile analitice au proprietăţi remarcabile şi sunt utilizate în electrotehnică , în mecanica cuantică etc.

Corolarul 7.2. *Dacă $f \in C^p(A), A \subset \mathbb{R}^n$ deschis, atunci în vecinătatea oricărui punct $a \in A$ are loc formula*

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(x) + \frac{1}{2!}[T_a(x)]^{(2)} + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}[T_a(x)]^{(p-1)} + o(\|x-a\|^{p-1})$$

Corolarul 7.3. *Fie $A \subset \mathbb{R}^2$ un deschis şi $f\colon A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^2(A)$, atunci pentru orice punct (x,y) din vecinătatea unui punct fixat $a = (x_0, y_0) \in A$, are loc formula*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x - x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_\xi+2(x-x_0)(y-y_0)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_\xi+(y-y_0)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_\xi\right],$$

unde ξ este un punct situat pe segmentul ce uneşte a cu (x, y),adică există $0<\theta<1$ astfel încât

$$\xi=((1-\theta)x_0+\theta x,(1-\theta)y_0+\theta y)=(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))$$

Teorema 7.3. *Fie $f\colon A\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $A\subset\mathbb{R}^2$. Fie a un punct critic al lui f (adică $df(a)=0$). Dacă forma pătratică $d^2f(a)$ este pozitiv definită (respectiv negativ definită), atunci a este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f.*

Metode de determinare a extremelor unei funcţii de mai multe variabile

I) 1) Se determină punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_n)=0$$

Fie $a=(a_1,\ldots,a_n)$ un astfel de punct critic.

2) Se scrie matricea hessiană $H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{1\le i,j\le n}$

3) Se determină valorile proprii ale matricei H.

Dacă toate valorile proprii sunt strict pozitive, atunci a este punct de minim local.

Dacă toate valorile proprii sunt strict negative, atunci a este punct de maxim local.

Dacă unele valori proprii sunt strict pozitive şi altele strict negative, atunci a nu este punct de extrem (se numeşte **punct şa**).

Dacă 0 se află printre valorile proprii,atunci studiem separat semnul diferenţei $f(x_1,\ldots,x_n)-f(a_1,\ldots,a_n)$ cu ajutorul dezvoltării Taylor.

II) Cazul $n=2$:

1) Se determină punctele critice din sistemul $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$.
Fie $a=(a_1,a_2)$ un astfel de punct critic.

2) Calculăm $r_0=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2), s_0=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a_1,a_2), t_0=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)$ şi $d^2f((a_1,a_2)(dx,dy)=r_0dx^2+2s_0dxdy+t_0dy^2$

Dacă $r_0>0, r_0t_0-s_0^2>0$, deci $d^2f((a_1,a_2)(dx,dy)>0$, atunci a e punct de minim local.

Dacă $r_0<0, r_0t_0-s_0^2>0$, deci $d^2f((a_1,a_2)(dx,dy)<0$, atunci a e punct de maxim local.

Dacă $r_0t_0-s_0^2<0$, atunci $d^2f((a_1,a_2)(dx,dy)$ nu păstrează semn constant, deci a nu poate fi punct de extrem local.

Dacă $r_0t_0-s_0^2=0$, atunci $d^2f((a_1,a_2)(dx,dy)$ e semidefinită , deci pentru a stabili dacă a este sau nu punct de extrem studiem semnul diferenţei $f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)$ cu ajutorul dezvoltării Taylor.

III) Fie $K\subset \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă şi f o funcţie de clasă C^1 pe un deschis care conţine K. Extremele globale ale lui f pe K sunt atinse în puncte din K. Dacă aceste puncte aparţin interiorului lui K, Int (K), atunci ele sunt în mod necesar puncte critice şi pot fi determinate aplicând teorema lui Fermat.Dacă ele nu aparţin lui Int (K), atunci ele aparţin frontierei lui K,Fr (K) şi sunt necesare alte metode pentru determinarea lor (de exemplu, metoda multiplicatorilor lui Lagrange ce va fi dezvoltată ulterior).

Teorema 7.4. *(Teorema funcţiilor implicite) Fie $\Phi_1(\underline{x},\underline{y}),\ldots,\Phi_m(\underline{x},\underline{y})$ m funcţii cu valori reale de câte $n+m$ variabile reale $\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\underline{y}=(y_1,\ldots,y_m)$, pe care le presupunem de clasă C^1 pe un deschis U din $\mathbb{R}^{n+m}$.Fie $M=\{(\underline{x},\underline{y})\in U/\Phi_1(\underline{x},\underline{y})=0,\ldots,\Phi_m(\underline{x},\underline{y})=0\}$. Presupunem că într-un punct $(\underline{a},\underline{b})\in M\subset\mathbb{R}^{n+m}$ avem $\frac{D(\Phi_1,\ldots,\Phi_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}(\underline{a},\underline{b})\neq 0$. Atunci există un deschis $A\subset\mathbb{R}^n$, un deschis $B\subset\mathbb{R}^m$ şi o funcţie $\varphi\colon A\to B$ de clasă C^1 astfel încât $\underline{a}\in A,\underline{b}\in B,\underline{b}=\varphi(\underline{a}),A\times B\subset U$ şi,în plus, $M\cap(A\times B)$ să coincidă cu graficul lui φ, adică*
$\{(\underline{x},\underline{y})\in A\times B/\Phi_1(\underline{x},\underline{y})=0,\ldots,\Phi_m(\underline{x},\underline{y})=0\}=\{(\underline{x},\varphi(\underline{x})/\underline{x}\in A\}$

Consecinţe ale teoremei funcţiilor implicite

1) Fie $F(x,y)$ o funcţie de clasă C^2 pe un deschis $U\subset\mathbb{R}^2$ şi $(a,b)\in U$ un punct astfel încât $F(a,b)=0$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$. Atunci, cf. Teoremei 7.4,există o funcţie $y=y(x)$ de clasă C^2 într-o vecinătate W a lui a (numită şi **funcţie implicită definită de relaţia** $F(x,y)=0$) astfel încât $F(x,y(x))=0$ în orice punct $x\in W$. Cum funcţia y există , se pot calcula derivatele de ordinul I şi II în punctul curent din W, derivând relaţia $F(x,y(x))=0$ în raport cu x, conform regulii de derivare a funcţiilor compuse:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y'=0 \tag{7.1}$$

Derivând din nou în raport cu x relaţia (9.1) se obţine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot y'+y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'\right)+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0 \tag{7.2}$$

Din relaţiile (7.1) şi (7.2) se determină y',y'' în punctul curent (din W). Punctele în care $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ se numesc **puncte singulare** pentru curba $F(x,y)=0$.

Extremele funcţiei implicite $y=y(x)$ definită de relaţia $F(x,y)=0$ se determină punând condiţia necesară $y'=0$, adică rezolvând conform (7.1) sistemul

$$F(x,y)=0,\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0,\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0 \tag{7.3}$$

Pentru precizare, este suficient de aflat semnul lui y'' în fiecare din punctele critice (în ipoteza că y'' este nenul acolo); din relaţia (7.2) rezultă că
$y'' = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$. Geometric, determinarea extremelor funcţiei implicite $y = y(x)$ revine la aflarea punctelor de ordonată maximă şi minimă situate pe curba $F(x, y) = 0$.

2) Fie $F\colon U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Relaţia $F(x, y, z) = 0$ defineşte local, în condiţiile Teoremei 7.4, o funcţie $z = z(x, y)$ astfel încât să aibă loc identitatea $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Deşi în general această funcţie nu se poate explicita efectiv, se pot calcula $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, derivând relaţia $F(x, y, z(x, y)) = 0$ în raport cu x, y şi obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{7.4}$$

Pentru a determina extremele locale ale funcţiei $z(x, y)$ este necesar să aflăm punctele critice , rezolvând sistemul $F(x, y, z) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} \neq$ $\neq 0$, apoi să aflăm semnul expresiei $r_0 t_0 - s_0^2$ etc. Geometric, aceasta revine la a determina punctele de cotă maximă sau minimă situate pe suprafaţa $F(x, y, z) = 0$.

3) Fie $F(x, y, z), G(x, y, z)$ două funcţii de clasă C^1 pe un deschis U din $\mathbb{R}^3$. Sistemul de relaţii $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ poate fi rezolvat în raport cu y şi z şi sunt definite,în condiţiile Teoremei 7.4, funcţii $y(x), z(x)$ (de exemplu,în vecinătatea oricărui punct $(a, b, c) \in U$ unde $F(a, b, c) =$ $= 0, G(a, b, c) = 0, \frac{D(F,G)}{D(y,z)}(a, b, c) \neq 0)$. Pentru calculul derivatelor $y'(x), z'(x)$ nu se derivează y, z în raport cu x (pentru că acestea nu sunt explicitate efectiv), ci se derivează în raport cu x relaţiile iniţiale care au definit $y(x), z(x)$; atunci rezultă $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot z' = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot z' = 0$, de unde, cu ajutorul regulii lui Cramer, obţinem y', z'.

Definiţia 7.3. Fie $f(\underline{x}, \underline{y}), \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \underline{y} = (y_1, \ldots, y_m), f\colon U \to \mathbb{R}$ o funcţie de $n + m$ variabile reale,cu valori reale,de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ (numită **funcţie-scop** sau **funcţie-obiectiv**). Presupunem că există m "legături" între variabilele $\underline{x}, \underline{y}$, adică m relaţii de forma

$$g_1(\underline{x}, \underline{y}) = 0, \ldots, g_m(\underline{x}, \underline{y}) = 0, g_i\colon U \to \mathbb{R} \tag{7.5}$$

de clasă $C^1(U)$,$1 \leq i \leq m$. Fie $M = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in U / g_i(\underline{x}, \underline{y}) = 0, 1 \leq i \leq m\}$ mulţimea punctelor din U care verifică legăturile (7.5).

Se numeşte **punct de extrem local al funcţiei f cu legăturile (7.5)** orice punct $(\underline{x_0}, \underline{y_0}) \in M$ pentru care există o vecinătate $W \subset U$ astfel încât diferenţa $f(\underline{x}, \underline{y}) - f(\underline{x_0}, \underline{y_0})$ să aibă semn constant pentru orice $(\underline{x}, \underline{y}) \in M \cap W$.

Teorema 7.5. *(Lagrange) Cu notaţiile de la început, presupunem că* $(\underline{x_0}, \underline{y_0})$ *este un punct de extrem local al lui* f *cu legăturile (7.5) şi că*

$$\frac{D(g_1, \ldots, g_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(\underline{x_0}, \underline{y_0}) \neq 0 \tag{7.6}$$

Atunci există m *numere reale* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *(numite multiplicatori Lagrange) astfel încât considerând funcţia* $F = f + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m$*, punctul* $(\underline{x_0}, \underline{y_0})$ *să verifice în mod necesar sistemul de* $n + 2m$ *ecuaţii*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial F}{\partial y_k} = 0, g_l = 0 (1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq m) \tag{7.7}$$

cu $n + 2m$ *necunoscute* $\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{y}$.

7.2 Probleme rezolvate

1. Folosind polinomul Taylor de gradul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98}$.

   Soluţie. Se consideră funcţia $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ pe care o dezvoltăm după formula lui Taylor în punctul $(1, 1)$, pentru $h = 0,03, k = -0,02$:
   $\sqrt{1,03} \cdot \sqrt[3]{0,98} = f(1+h, 1+k) \simeq f(1,1) + \frac{1}{1!}[\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)k] +$
   $+\frac{1}{2!}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2] = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{2} \cdot 0,03 - \frac{1}{3} \cdot 0,02\right) +$
   $+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{4} \cdot 0,0009 - \frac{2}{6} \cdot 0,0006 - \frac{2}{9} \cdot 0,0004\right) \simeq 1,0081$ □

2. Să se determine constanta k astfel încât $f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 -$ $-16x - 16y + k$ să aibă un minim egal cu 0.

   Soluţie. Determinăm punctele critice din sistemul

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 6y - 16 = 0$$

   $$\frac{\partial f}{\partial z} = 6x + 10y - 16 = 0$$

   şi obţinem $(1, 1)$

   Avem $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$

   Cum $r_0 t_0 - s_0^2 = 60 - 36 = 24 > 0, r_0 > 0$,rezultă că $(1, 1)$ e punct de minim. Valoarea minimă a funcţiei este $f_{\min}(x, y) = f(1, 1) = 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow k = 16$ □

3. Să se găsească punctele de extrem local pentru funcţiile:

   a) $f(x,y) = (x+1)^{2n} + (y-2)^{2m}, n, m \in \mathbb{N}^*$

   b) $f(x,y) = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x;$

   c) $f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y), 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi;$

   d) $f(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^3 - 3y^2 + 3y;$

   e) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z), (x,y,z) \in (0,\pi) \times \times (0,\pi) \times (0,\pi);$

   f) $f(x,y,z) = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z), a > 0, (x,y,z) \neq (0,0,0)$

Soluţie. a) Punctele critice sunt date de soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2n(x+1)^{2n-1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2m(y-2)^{2m-1} = 0$$

Obţinem punctul $M(-1,2)$. Deoarece $r_0t_0 - s_0^2 = 0$, vom studia semnul diferenţei $f(x,y) - f(-1,2) = (x+1)^{2n} + (y-2)^{2m} \geq 0$, deci M este punct de minim

b) Punctele critice sunt date de soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8 = 0$$

Obţinem punctele:
$M_1(1+\sqrt{2}, 2), M_2(1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}), M_3(1+\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}), M_4(1-\sqrt{2}, 2),$
$M_5(1-\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}), M_6(1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{3})$

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 48y + 36$ avem:

pentru M_1,$r_0t_0 - s_0^2 = -72\sqrt{2} < 0$, deci M_1 nu este punct de extrem

pentru M_2,$r_0t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0, r_0 = 6\sqrt{2} > 0$, deci M_2 este punct de minim

pentru M_3,$r_0t_0 - s_0^2 = 144\sqrt{2} > 0, r_0 = 6\sqrt{2} > 0$, deci M_3 este punct de minim

pentru M_4,$r_0t_0 - s_0^2 = 72\sqrt{2} > 0, r_0 = -6\sqrt{2} < 0$, deci M_4 este punct de maxim

pentru M_5,$r_0t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0$, deci M_5 nu este punct de extrem

pentru M_6,$r_0t_0 - s_0^2 = -144\sqrt{2} < 0$, deci M_6 nu este punct de extrem

c) Punctele critice sunt date de soluţiile sistemului

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = \sin y \cdot \sin(2x+y) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cdot \cos y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = \sin x \cdot \sin(x+2y) = 0$

Obţinem punctele $M_1(\pi, \pi), M_2(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\sin y \cdot \cos(2x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin 2(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$ $= 2\sin x \cdot \cos(x+2y)$ avem:

- pentru M_1,$r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ şi nu putem spune nimic.

Vom folosi formula lui Taylor.Deoarece diferenţialele de ordin unu şi doi sunt nule, trebuie să considerăm în formula lui Taylor termenii de ordin superior:

$f(x,y) - f(\pi,\pi) = \frac{1}{3!}[(x-\pi)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\pi,\pi) + 3(x-\pi)^2(y-\pi)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\pi,\pi) +$ $+ 3(x-\pi)(y-\pi)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\pi,\pi) + (y-\pi)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\pi,\pi)] = \frac{1}{3!}[6(x-\pi)^2(y-$ $-\pi) + 6(x-\pi)(y-\pi)^2]$ ce ia şi valori pozitive şi valori negative într-o vecinătate a lui (π, π), deci M_1 nu este punct de extrem.

- pentru M_2,$r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{9}{4} > 0, r_0 = -\sqrt{3} < 0$, deci M_2 este punct de maxim

d) Punctele critice sunt date de soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 12x^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6y + 3 = 0$$

Obţinem punctele $M_1(0,1), M_2(3,1)$

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 24x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6$ avem:

pentru M_1,$r_0 t_0 - s_0^2 = 0$. E necesar studiul diferenţei $f(x,y) - f(0,1)$ în vecinătatea lui M_1, cu formula lui Taylor. Obţinem
$f(x,y) - f(0,1) = x^4 - 4x^3 + (y-1)^3$.
Această expresie are semn variabil în vecinătatea lui M_1, fiind pozitivă în punctele $(0, 1+\lambda)$ cu $\lambda > 0$ şi negativă în punctele $(0, 1-\lambda)$ cu $\lambda > 0$. Aşadar, M_1 nu este punct de extrem (e punct şa)

Analog pentru M_2. Se dezvoltă $f(x,y) - f(3,1)$ în jurul lui M_2, adică după puterile lui $x-3$ şi $y-1$ şi după calcul rezultă
$f(x,y) - f(3,1) = 18(x-3)^2 + 8(x-3)^3 + (x-3)^4 + (y-1)^2 =$ $= (x-3)^2(x^2+2x+3) + (y-1)^2 \geq 0$, deci M_2 este punct de minim

e) Punctele critice sunt date de soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y+z) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y+z) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos z - \cos(x+y+z) = 0$$

Se observă că avem $\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x+y+z)$. Aceasta implică $x = y = z$ în intervalul de definiţie. Inlocuind această relaţie în una din ecuaţii , obţinem $\cos x = \cos 3x$ sau $-2\sin x \cdot \sin 2x = 0$ rezultă $x = \frac{\pi}{2}$, deci avem un singur punct critic $M(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x + \sin(x+y+z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y + \sin(x+y+z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$ $= -\sin z + \sin(x+y+z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \sin(x+y+z)$

Scriem matricea hessiană

$$H = \begin{pmatrix} -\sin x + \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) \\ \sin(x+y+z) & -\sin y + \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) \\ \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & -\sin z + \sin(x+y+z) \end{pmatrix}$$

Atunci $H(M) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Avem $\Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$
$= -4 < 0$

Aşadar, M este punct de maxim local.

f) Punctele critice sunt date de soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3(a - x - 2y - 3z) - xy^2z^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3(a - x - 2y - 3z) - 2xy^2z^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2(a - x - 2y - 3z) - 3xy^2z^3 = 0$$

Rezolvând sistemul găsim punctul $x = y = z = \frac{a}{7}$. In punctul $M\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$ avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -12 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$ $= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3 \cdot \frac{a^5}{7^5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -6 \cdot \frac{a^5}{7^5}$

Matricea hessiană în punctul M este

$$H(M) = \begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -3 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -3 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -12 \cdot \frac{a^5}{7^5} \end{pmatrix}$$

Obţinem $\Delta_1 = -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} \end{vmatrix} = 8 \cdot \frac{a^{10}}{7^{10}} >$
$> 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -3 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -2 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} \\ -3 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -6 \cdot \frac{a^5}{7^5} & -12 \cdot \frac{a^5}{7^5} \end{vmatrix} = -18 \cdot \frac{a^{10}}{7^{10}} < 0$

Aşadar, M este punct de maxim. □

4. Să se arate că $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ are o infinitate de maxime locale şi nici un minim local.

Soluţie. Punctele critice sunt date de soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(1 + e^y) \sin x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y(\cos x - 1 - y) = 0$$

Din prima ecuaţie rezultă punctele critice $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ şi din cea de-a doua $y_k = \cos x - 1 \Longrightarrow y_k = (-1)^k - 1, k \in \mathbb{Z}$

Obţinem derivatele de ordinul doi:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -(1 + e^y) \cos x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y(\cos x - 1 - y) - e^y = e^y(\cos x - 2 - y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x$

Avem $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_k, y_k) = -(1 + e^{y_k}) \cos x_k = -(1 + e^{y_k}) \cdot (-1)^k, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_k, y_k) = e^{y_k}((-1)^k - 2 - (-1)^k + 1) = -e^{y_k}, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_k, y_k) = 0$

Atunci $r_0 t_0 - s_0^2 = (-1)^k e^{y_k}(1 + e^{y_k})$

Pentru k=par, $r_0 t_0 - s_0^2 > 0, r_0 < 0$, deci avem o infinitate de maxime locale

Pentru k=impar, $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, deci $(x_k, y_k), k \in \mathbb{Z}$ nu sunt puncte de extrem □

5. Să se găsească extremele funcţiei

$$f(x, y, z, u) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + u, & x, y, z, u > 0 \\ 0, & x = y = z = u = 0 \end{cases}$$

Soluţie. $f(x, y, z, u) \geq f(0, 0, 0, 0) = 0 \Longrightarrow (0, 0, 0, 0)$ e punct de minim local

Restricţia lui f la $x, y, z, u > 0$ este de clasă C^∞. Punctele critice ale acestei restricţii sunt soluţiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{u} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{z}{u^2} + 1 = 0$$

Obţinem punctul $(1,1,1,1)$. Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi în acest punct:
$\frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial z^2} = \frac{\partial f}{\partial u^2} = 2, \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f}{\partial z \partial u} =$
$= \frac{\partial f}{\partial u \partial z} = -1, \frac{\partial f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial u} = \frac{\partial f}{\partial u \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y \partial u} = \frac{\partial f}{\partial u \partial y} = 0$
Scriem matricea hessiană în acest punct şi aflăm valorile proprii din ecuaţia caracteristică :$(2-\lambda)^4 - 3(2-\lambda)^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $\lambda_{1,2,3,4} =$ $= 2 \mp \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$. Cum toate valorile proprii sunt strict pozitive, rezultă că $(1,1,1,1)$ este punct de minim local □

6. Să se calculeze y', y'' pentru funcţia $y = y(x)$ definită implicit de ecuaţiile $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 1 = 0, x^2+y^2 \neq 0$.

Soluţie. Fie $F(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 1 = 0$. Atunci
$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}$

$y'' = \frac{(1+y')(x-y)+(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)(x-y)+(x+y)\left(1-\frac{x+y}{x-y}\right)}{(x-y)^2} =$
$= \frac{2(x^2-2xy-y^2)}{(x-y)^3}$ □

7. Să se arate că dacă funcţia $z = f(x,y)$ este definită implicit prin $(y+z)\sin z - y(x+z) = 0$, atunci este satisfăcută ecuaţia $z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Soluţie. Avem $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{(y+z)\cos z + \sin z - y}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z-\sin z}{(y+z)\cos z + \sin z - y}$
Astfel $z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y[z\sin z - y(x+z-\sin z)]}{(y+z)\cos z + \sin z - y} = \frac{y[(y+z)\sin z - y(x+z)]}{(y+z)\cos z + \sin z - y} =$
$= 0$ □

8. Să se calculeze dz şi d^2z în punctul $M_0(2,0,1)$ pentru funcţia $z = f(x,y)$ definită implicit prin $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$.

Soluţie. Avem
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8z-4x}{2z-8x-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4y}{2z-8x-1}$
Derivând aceste relaţii în raport cu x şi y şi ţinând cont că $z = f(x,y)$ deducem

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{56z+4-(56x+8)\frac{\partial z}{\partial x}}{(2z-8x-1)^2} = \frac{112(z^2+2x^2-8xz-z)-4}{(2z-8x-1)^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8y(\frac{\partial z}{\partial x}-4)}{(2z-8x-1)^2} = \frac{32(7x+1)}{(2z-8x-1)^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(-8z+32x+4)(2z-8x-1)-32y^2}{(2z-8x-1)^3}$

Deoarece $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 0$,rezultă $dz(M_0) = 0$.

Apoi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0) = \frac{4}{15}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4}{15}$, deci $d^2z(M_0) = \frac{4}{15}[(dx)^2+$ $+(dy)^2]$

Altă metodă :

Diferențiem relația de definiție și obținem:

$(*)4xdx+4ydy+2zdz-8xdz-8zdx-dz = 0 \Longrightarrow dz = \frac{(8z-4x)dx-4ydy}{2z-8x-1} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow dz(M_0) = 0$

Diferențiind încă o dată relația $(*)$, observând că dx și dy sunt constante și dz este o funcție obținem

$4(dx)^2 + 4(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2zd^2z - 8dxdz - 8xd^2z - 8dzdx - d^2z =$ $= 0 \Longrightarrow d^2z = \frac{1}{2z-8x-1}[16dxdz - 4(dx)^2 - 4(dy)^2 - 2(dz)^2] \Longrightarrow$ $\Longrightarrow d^2z(M_0) = \frac{4}{15}[(dx)^2 + (dy)^2]$ □

9. Funcțiile $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$ sunt definite implicit de relațiile $u + v = x + y, xu + yv = 1$. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Soluție. Derivând cele două relații în raport cu x obținem sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = -u$$

Rezolvând sistemul obținem $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u+y}{y-x}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u+x}{x-y}$

Derivând cele două relații în raport cu y obținem sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

$$x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial v}{\partial y} = -v$$

Soluțiile sunt $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v+y}{y-x}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v+x}{x-y}$

Altă metodă :

Prin diferențierea relațiilor de definiție obținem sistemul

$$du + dv = dx + dy$$

$$xdu + ydv = -udx - vdy$$

cu soluţiile $du = \frac{u+y}{y-x}dx + \frac{v+y}{y-x}dy$ şi $dv = \frac{u+x}{x-y}dx + \frac{v+x}{x-y}dy$.

Deoarece $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ şi $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$, prin identificarea cu relaţiile de mai sus, obţinem expresiile pentru $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. □

10. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei implicite $y = f(x)$ definită prin $F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Soluţie. Conform (7.3), punctele critice sunt soluţiile sistemului

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2y - 2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2x + 10y + 4 \neq 0$$

$$F(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

Rezolvând acest sistem obţinem $x = 1, y = 0$ şi $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$

Deoarece $f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ rezultă că $f''(1) = -1 < 0$, deci $x = 1$ e punct de maxim.

Cum $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0$ rezultă că $x = \frac{1}{2}$ e punct de minim. □

11. Să se discute în funcţie de parametrul real a, extremele funcţiei $x \longrightarrow y(x)$ definită implicit de ecuaţia $F(x, y) = xy^2 - yx^2 = 2a^3$ şi de condiţia $y(2a) = a(1 + \sqrt{2})$.

Soluţie. Conform relaţiilor (7.3), aflăm punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = y^2 - 2xy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2xy - x^2 \neq 0$$

$$F(x, y) = xy^2 - yx^2 = 2a^3$$

Obţinem soluţia $(a, 2a)$, $a \neq 0$ coerentă cu condiţia $y(2a) = a(1 + \sqrt{2})$ (deoarece se verifică $2a[a(1 + \sqrt{2})]^2 - a(1 + \sqrt{2})(2a)^2 = 2a^3$). De aceea $x = a$ este punctul critic al funcţiei implicite y.

Atunci $y''(a) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(a) = \frac{4}{3a}$

Dacă $a > 0$ (respectiv $a < 0$), atunci $x = a$ este punct de minim (respectiv de maxim) □

12. Să se afle extremele funcţiei $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.

Soluţie. Aflăm punctele critice din sistemul

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$$

adică

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 7 = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$2y - 2 = 0$$

$$2z \neq 0$$

Obţinem punctele $A(1, 1, 3), B(1, 1, -3)$

Avem $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x-1}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{y-1}{z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z^2+(x-1)^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x-1)(y-1)}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(y-1)^2+z^2}{z^3}$

Pentru punctul A,$r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{1}{9} > 0, r_0 = -\frac{1}{3} < 0$, deci A e punct de maxim

Pentru punctul B,$r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{1}{9} > 0, r_0 = \frac{1}{3} > 0$, deci B e punct de minim □

13. Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei $(x, y) \longrightarrow z(x, y)$ definită de ecuaţia $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 12 = 0$ şi de condiţia $z(1, 0) = 2 + \sqrt{15}$.

Soluţie. Aflăm punctele critice din sistemul

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 12 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 4y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 4 \neq 0$$

ce are soluţiile $M_1(0,0,6), M_2(0,0,-2)$. Dintre acestea numai M_1 este în concordanţă cu ipoteza $z(1,0) = 2+\sqrt{15}$. Astfel, punctul critic al funcţiei implicite z este $(0,0)$.

Folosind relaţiile (7.4) obţinem :
$r_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{4} < 0, s_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = 0, t_0 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{1}{2}$, deci $r_0 t_0 - s_0^2 = \frac{1}{8} > 0$ şi cum $r_0 < 0$, rezultă că $(0,0)$ este punct de maxim □

14. Să se găsească extremele funcţiei $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ cu legătura $2x+3y-z=1$.

Soluţie. Problema se poate reduce la o problemă de extrem liber înlocuind în expresia lui f pe z din legătură . Rezultă $f = x^2+y^2+(2x+3y-1)^2$
Aflăm punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4(2x+3y-1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6(2x+3y-1) = 0$$

ce are soluţiile $x = \frac{1}{7}, y = \frac{3}{14}$
Avem $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right) = 10, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right) = 12, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right) =$ $= 20$, deci $r_0 t_0 - s_0^2 = 56 > 0$ şi cum $r_0 = 10 > 0$, rezultă că $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right)$ e punct de minim □

15. Să se determine extremele funcţiilor cu legăturile indicate:

a) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3, x^2+y^2+z^2 = 3, x>0, y>0, z>0$;

b) $f(x,y,z) = xyz, x+y+z-5 = 0, xy+yz+zx-8 = 0$

Soluţie. a) Scriem funcţia lui Lagrange $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+$ $+\lambda(x^2+y^2+z^2-3)$

Rezolvăm sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 2\lambda z = 0$$

$$x^2+y^2+z^2-3 = 0$$

$$x>0, y>0, z>0$$

şi obţinem soluţiile $x = 1, y = 1, z = 1, \lambda = -\frac{3}{2}$

Calculăm derivatele de ordinul doi ale funcţiei F în punctul $(1,1,1)$ şi avem $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(1,1,1) = 3, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1,1,1) =$
$= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(1,1,1) = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}(1,1,1) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}(1,1,1) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}(1,1,1) =$
$= \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}(1,1,1) = 0$

Scriem diferenţiala de ordinul doi a funcţiei F în punctul $(1,1,1)$: $d^2F(1,1,1) = 3[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] > 0$,deci $(1,1,1)$ e punct de minim

b) Funcţia lui Lagrange este $F(x,y,z) = xyz + \lambda_1(x+y+z-5) + \lambda_2(xy+$
$+yz + zx - 8)$

Rezolvăm sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_2 z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_2 z = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_2 x = 0$$

$$x + y + z - 5 = 0$$

$$xy + yz + zx - 8 = 0$$

şi obţinem soluţiile:

1) $\lambda_1 = \frac{16}{9}, \lambda_2 = -\frac{4}{3}, M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), M_3\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

2) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2, M_4(2,2,1), M_5(2,1,2), M_6(1,2,2)$

Avem $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = z + \lambda_2, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} =$
$= y + \lambda_2, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = x + \lambda_2$

Diferenţiala de ordinul doi a funcţiei F este $d^2F = 2(z + \lambda_2)dxdy+$
$+2(x + \lambda_2)dydz + 2(y + \lambda_2)dxdz$

Diferenţiem legăturile şi obţinem

$$dx + dy + dz = 0$$

$$(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0$$

1) Avem $d^2F(M_1) = 2dxdy$ şi $dx + dy + dz = 0, \frac{11}{3}dx + \frac{11}{3}dy + \frac{8}{3}dz =$
$= 0$. Rezultă că $dz = -dx - dy$, deci introducând în a doua ecuaţie obţinem $dx = -dy$, aşadar $dz = 0$, de unde $d^2F(M_1) = -2(dx)^2 <$
$< 0 \Longrightarrow M_1$ e punct de maxim.

Analog se arată că M_2 şi M_3 sunt puncte de maxim.

2) $d^2F(M_4) = -2dxdy$ şi $dx+dy+dz = 0, 3dx+3dy+4dz = 0$,de unde rezultă că $dy = -dx, dz = 0$. Aşadar, $d^2F(M_4) = 2(dx)^2 > 0 \Longrightarrow M_4$ e punct de minim.

Analog M_5 şi M_6 sunt puncte de minim. □

16. Fie $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{2} + y \leq 1\right\}$ şi $f\colon M \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-1)^3 + 2y$. Să se găsească $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x,y)$ şi $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y)$.

Soluţie. Cum f e continuă şi M e compactă rezultă că f este mărginită şi îşi atinge marginile.

In $\text{Int}(M)$, f e diferenţiabilă şi punctele de extrem,dacă există , se află printre soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x-1)^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 = 0$$

Deci funcţia neavând puncte critice în $\text{Int}(M)$, nu are nici puncte de extrem şi atunci le căutăm pe $\text{Fr}(M) = [OA] \cup [AB] \cup [BO]$

Mulţimea M reprezintă un triunghi de vârfuri $O(0,0), A(2,0), B(0,1)$

Considerăm $f_1\colon [0,2] \to \mathbb{R}, f_1(x) = f/_{[OA]}(x,y) = f(x,0) =$
$= (x-1)^3$. Dacă sunt puncte de extrem în $\text{Int}([OA])$, acestea anulează pe f_1': $f_1' = 3(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ şi deoarece $P_0(1,0) \in \text{Int}([OA])$, acesta ar putea fi punct de extrem pentru f.Pe $[OA]$ puncte de extrem ar mai putea fi $O(0,0), A(2,0)$

Caut puncte de extrem pe $[BO]$ şi consider $f_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}, f_2(y) =$
$= f/_{[BO]}(x,y) = f(0,y) = -1+2y$ şi cum $f_2'(y) \neq 0, \forall y \in [0,1]$,funcţia f_2 îşi atinge extremele în $O(0,0)$ sau $B(0,1)$.

Caut puncte de extrem pe $[AB]$ şi consider $f_3\colon [0,3] \to \mathbb{R}, f_3(x) =$
$= f/_{[AB]}(x,y) = f\left(x, 1-\frac{x}{2}\right) = (x-1)^3 + 2 - x$.
Cum $f_3'(x) = 3(x-1)^2 - 1 = 0$ are soluţiile $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$, iar $P_1\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right), P_2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \in \text{Int}([AB])$, acestea ar putea fi puncte de extrem în $\text{Int}([AB])$. Pe $[AB]$ am mai putea avea puncte de extrem în $A(2,0), B(0,1)$.

Aşadar, pe M posibilele puncte de extrem pentru f sunt O, A, B, P_0, P_1, P_2. Deoarece $f(0,0) = -1, f(2,0) = 1, f(0,1) = 1, f(1,0) = 0$,
$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}, f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \max\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(P_2), \min\limits_{(x,y)\in M} f(x,y) = f(O)$ □

17. Să se determine $\inf\limits_D f(x,y)$ şi $\sup\limits_D f(x,y)$, pentru funcţia $f(x,y) = x^2 + +y^2 - 3x - 2y + 1$, unde $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Soluţie. Cum D e compactă şi f e continuă , atunci f e mărginită şi îşi atinge marginile. Vom determina extremele funcţiei situate în interiorul cercului $x^2 + y^2 = 1$ şi apoi extremele funcţiei situate pe frontiera cercului şi vom compara valorile extreme ale funcţiei.

Extremele funcţiei situate în interiorul cercului se află printre soluţiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 = 0$$

Obţinem $x_0 = \frac{3}{2}, y_0 = 1$. Avem $x_0^2 + y_0^2 = \frac{13}{4} > 1$, deci extremele nu pot fi în interiorul cercului.

Deci punctele de extrem ale funcţiei se vor găsi pe frontiera cercului. Calculăm extremele funcţiei f cu legătura $x^2 + y^2 = 1$. Scriem funcţia lui Lagrange $F(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Aflăm punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3 + 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2 + 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Obţinem $\lambda_1 = -1 - \sqrt{\frac{13}{4}}, x_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}}, y_1 = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ şi

$$\lambda_2 = -1 + \sqrt{\frac{13}{4}}, x_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}, y_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Avem $d^2F = 2(1+\lambda)[(dx)^2 + (dy)^2]$

Pentru λ_1,$d^2F(x_1, y_1) < 0 \Longrightarrow (x_1, y_1)$ e punct de maxim

Pentru λ_2,$d^2F(x_2, y_2) > 0 \Longrightarrow (x_2, y_2)$ e punct de minim $\square$

18. Să se determine extremele globale pentru funcţia $f(x,y,z) = y + z$ pe mulţimea $K = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

Soluţie. Cum K e compactă şi f e continuă , atunci f e mărginită şi îşi atinge marginile. Vom determina extremele funcţiei situate în interiorul sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ şi apoi extremele funcţiei situate pe frontiera sferei şi vom compara valorile extreme ale funcţiei.

Extremele funcţiei situate în interiorul sferei se află printre soluţiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1 = 0$$

Deci nu avem puncte critice în interior.

Deci punctele de extrem ale funcţiei se vor găsi pe frontiera sferei. Calculăm extremele funcţiei f cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Scriem funcţia lui Lagrange $F(x, y) = y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

Aflăm punctele critice din sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + 2\lambda z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Obţinem $\lambda_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}, x_1 = 0, y_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, z_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ şi $\lambda_2 = -\frac{1}{3\sqrt{2}}, x_2 =$ $= \frac{3\sqrt{2}}{2}, y_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Aşadar,$f(x_1, y_1) = -3\sqrt{2}, f(x_2, y_2) = 3\sqrt{2}$, deci $\inf\limits_K f(x, y) = -3\sqrt{2}$, $\sup\limits_K f(x, y) = 3\sqrt{2}$ □

7.3 Probleme propuse

1. Să se scrie formula lui Taylor pentru:

   a) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ în punctul $(-2, 1)$;

   b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ în punctul $(1, 1, 1)$

2. Folosind polinomul Taylor de ordinul doi,să se calculeze valoarea aproximativă pentru: a) $(0,95)^{2,01}$,b) $1,02 \cdot 2,01^2 \cdot 3,03^3$.

   R: a) $f(0,95; 2,01) \approx 0,902$; b) $f(1,02; 2,01; 3,03) \approx 114,6159$

3. Să se determine extremele locale ale funcţiilor:

   a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - xy$;

   b) $f(x,y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)e^{2x+3y}$;

   c) $f(x,y) = x^4 - 8^3 + 18x^2 - 8x + y^3 - 3y^2 - 3y$;

   d) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y), (x,y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   e) $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y), (x,y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   f) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

   g) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$;

   h) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, x, y, z > 0$;

   i) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

4. Să se calculeze $f'(1)$ şi $f''(1)$ pentru funcţia implicită $y = f(x)$, definită prin ecuaţia $(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) - 2 = 0$, satisfăcând condiţia $f(1) = 1$.

   R: $f'(1) = -1, f''(1) = -2$

5. Funcţiile $y = f(x)$ şi $z = g(x)$ sunt definite implicit prin relaţiile $x + y + z = a, xyz = b$. Să se calculeze dy, dz, d^2y, d^2z

6. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi II pentru funcţia $z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia:

   a) $y + \operatorname{arctg} \frac{x}{z-x} - z = 0, z - y \neq 0$;

   b) $z = \sqrt{x^2+y^2} \sin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2 + y^2 \neq 0$;

   c) $x + y + z = e^{x+y-z}$

7. Să se calculeze dz şi d^2z,dacă $z(x,y)$ e definită implicit de ecuaţia $\frac{y}{z} - \ln \frac{z}{x} = 0, \frac{z}{x} > 0, xz \neq 0$.

8. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă $z(x,y)$ este o funcţie definită implicit de ecuaţia $F(x, x+y, x+y+z) = 0$, unde F este o funcţie care admite derivate parţiale de ordinul I şi II.

9. Fie funcţia compusă $z = f(x,y)$ definită de $z = u^3+v^3$,funcţiile $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ fiind definite implicit prin relaţiile $u + v^2 = x, u^2 + v^2 = y$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

10. Fie funcţia $x \longrightarrow y(x)$ definită implicit de ecuaţia $f(x,y) = y^2+2yx^2-$ $-4x - 3 = 0$ şi de condiţia $y(1) = -1 + \sqrt{8}$. Se cere să se găsească punctele critice ale funcţiei implicite y şi să se stabilească natura acestor puncte.

    R: $x = \frac{1}{2}$ e punct de maxim local

11. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei implicite $y = f(x)$ definitaı prin $x^3 + y^3 - 3x^2y - 3 = 0$.

    R: $x = 0$ e punct de minim,$x = -2$ e punct de maxim

12. Fie $z = z(x, y)$ definită implicit prin ecuaţia $x^2 + y^2 + 2x - 4y + z^2 + z + 3 = 0$. Să se studieze extremele.

    R: $(-1, 2, -2)$ e punct de minim,$(-1, 2, 1)$ punct de maxim

13. Să se studieze extremele funcţiei $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$.

14. Să se determine extremele funcţiei $f(x, y) = x^2 + y^2 - y - x$ variabilele fiind legate prin condiţia $x + y = 1$.

    R: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e punct de minim

15. Să se găsească extremele funcţiei $f(x, y, z) = xy^2z^3$ cu legătura $x + 2y + 3z = a, x, y, z, a > 0$.

    R: $\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$ e punct de maxim

16. Să se studieze extremele funcţiei $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ cu legăturile $-x + y + z = 1, x - z = 0$

    R: $(-1, 1, -1)$ e punct de minim

17. Să se determine extremele globale ale funcţiilor următoare pe mulţimile K indicate:

    a) $f(x, y) = x^2 - y^2, K = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$;

    b) $f(x, y) = 4x - x^2 + 6y - y^2, K = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

    R: a) $\sup\limits_K f(x, y) = 4, \inf\limits_K f(x, y) = -4$

    b) $\sup\limits_K f(x, y) = 13, \inf\limits_K f(x, y) = -12$

Capitolul 8

Integrale improprii şi cu parametri

8.1 Noţiuni teoretice

Integrale improprii

Definiţia 8.1. Fie $a, b \in R$ şi fie $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă (integrabilă pe orice interval compact $[u, v] \subseteq [a, b)$). Integrala improprie (în b) $\int_a^b f(x)dx$ se numeşte **convergentă** dacă limita

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx$$

există şi este finită ; altfel, integrala se numeşte **divergentă** .
Definiţia 8.2. Dacă $f : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ este local integrabilă , atunci integrala improprie (la ∞) $\int_a^\infty f(x)dx$ se numeşte **convergentă** dacă limita

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx$$

există şi este finită .
Definiţia 8.3. Integrala improprie $\int_a^b f(x)dx$ (b poate fi şi ∞) se numeşte **absolut convergentă** dacă integrala $\int_a^b |f(x)|\, dx$ este convergentă .

Criterii de convergenţă

Criteriul lui Cauchy
Fie $f : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$, local integrabilă ; atunci integrala $\int_a^b f(t)dt$ este convergentă dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists\, b_\varepsilon \in [a, b)$ astfel încât $\forall x, y \in (b_\varepsilon, b)$ să rezulte $\left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$.
Criteriul de comparaţie
Fie $f, g : [a, b) \mapsto \mathbb{R}$, ($b$ poate fi şi ∞) astfel încât $0 \leq f \leq g$;

i. dacă integrala $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă , atunci şi integrala $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă .
ii. dacă integrala $\int_a^b f(x)dx$ este divergenă , atunci şi integrala $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă .

Criteriul de comparaţie la limită

Fie $f, g : [a, b) \mapsto [0, \infty)$ astfel încât există limita:

$$\ell = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

i. Dacă $\ell \in [0, \infty)$ şi $\int_a^b g(x)dx$ este convergentă , atunci şi $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă .
ii. Dacă $\ell \in (0, \infty)$ sau $\ell = \infty$ şi $\int_a^b g(x)dx$ este divergentă , atunci şi $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă .

Criteriul de comparaţie cu $\frac{1}{x^\alpha}$

Fie $a \in R$ şi $f : [a, \infty) \mapsto [0, \infty)$, local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x).$$

i. Dacă $\alpha > 1$ şi $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ este convergentă .

ii. Dacă $\alpha \leq 1$ şi $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ este divergentă .

Criteriul de comparaţie cu $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$

Fie $a < b$ şi $f : [a, b) \mapsto [0, \infty)$, local integrabilă astfel încât există

$$\ell = \lim_{x \to b} (b - x)^\alpha f(x).$$ $(x-a)^\alpha f(x)$

i. Dacă $\alpha < 1$ şi $0 \leq \ell < \infty$, atunci $\int\limits_a^b f(x)dx$ este convergentă .

ii. Dacă $\alpha \geq 1$ şi $0 < \ell \leq \infty$, atunci $\int\limits_a^b f(x)dx$ este divergentă .

Criteriul lui Abel

Fie $f, g : [a, \infty) \mapsto R$ cu proprietăţile:
f este de clasă C^1 , $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\int_a^\infty f'(x)dx$ absolut convergentă ,
g este continuă , iar funcţia $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ este mărginită pe $[a, \infty)$.
Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ este convergentă .

Integrale cu parametri

Definiţia 8.4. Fie $A \neq \emptyset$ şi $[a,b] \subset R$ un interval compact. Fie $f : [a,b] \times A \mapsto R$ o funcţie (de două variabile reale) astfel încât pentru orice $y \in A$ aplicaţia $[a,b] \ni x \mapsto f(x,y) \in R$ este integrabilă Riemann. Funcţia definită prin:

$$F : A \mapsto \mathbb{R},\ F(y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

se numeşte **integrală cu parametru.**

Continuitatea integralei cu parametru

Dacă $f : [a,b] \times A \mapsto \mathbb{R}$ este continuă , atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este funcţie continuă .

Formula lui Leibniz de derivare

Fie $f : [a,b] \times (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b] \times (c,d)$. Atunci integrala cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,\ \forall y \in (c,d).$$

Formula generală de derivare

Fie $f : [a,b] \times (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b] \times (c,d)$ şi fie φ, $\phi : (c,d) \mapsto [a,b)$ două funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$. Atunci funcţia $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} f(x,y)dx$ este derivabilă şi:

$$G'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\phi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(\phi(y),y)\phi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y),\ \forall y \in (c,d).$$

Schimbarea ordinei de integrare

Fie $f : [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie continuă ; atunci:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Integrale improprii cu parametri

Definiţia 8.5. Fie $f : [a,b) \times A \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă şi integrala (improprie) $\int_a^b f(x,y)dx$ converge. Se poate defini în acest caz funcţia

$$F(x,y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

numită **integrală improprie cu parametru.**

Definiţia 8.6. Integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ se numeşte **uniform convergentă** (în raport cu y) pe mulţimea A dacă

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, b_\varepsilon \in (a,b) \text{ astfel încât } \left|\int_t^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon,\ \forall t \in (b_\varepsilon, b),\ \forall y \in A.$$

Continuitatea integralei improprii cu parametru

Dacă $f : [a,b) \times A \mapsto \mathbb{R}$ este continuă şi dacă integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe A, atunci funcţia $F : A \mapsto \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este continuă .

Derivarea integralei improprii cu parametru

Fie $f : [a,b) \times (c,d) \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încîa t derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ există şi este continuă pe $[a,b) \times (c,d)$ şi pentru orice $y \in (c,d)$ fixat integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este convergentă . Dacă integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ este uniform convergentă pe (c,d), atunci integrala improprie cu parametru $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx,\ \forall y \in (c,d).$$

Schimbarea ordinei de integrare în integrala improprie

Dacă $f : [a,b) \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ este continuă şi dacă integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe (c,d), atunci :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx.$$

Criterii de uniform convergenţă

Criteriul lui Cauchy

Fie $f : [a,b) \times A \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă . Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i. integrala improprie $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă pe A.

ii. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, b_\varepsilon \in (a,b)$ astfel încât pentru orice $u, v \in (b_\varepsilon, b)$ rezultă

$$\left|\int_u^v f(x,y)dx\right| < \varepsilon, \forall y \in A.$$

Criteriul de comparaţie

Fie $f : [a,b) \times A \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in A$, aplicaţia $[a,b) \ni x \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ este local integrabilă şi fie $g : [a,b) \mapsto \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x,y)| \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b)$, $\forall y \in A$. Dacă integrala $\int_a^b g(x)dx$

este convergentă , atunci integrala $\int_a^b f(x,y)dx$ este uniform convergentă .

Funcţiile B (Beta) şi Γ (Gama) ale lui Euler

Teorema 8.1. *(a) Integrala improprie cu doi parametri reali*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{8.1}$$

există pentru orice $p > 0, q > 0$.

(b) Integrala improprie cu un parametru real

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{8.2}$$

există pentru orice $\alpha > 0$.

Definiţia 8.7. Funcţia $B\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia (8.1) se numeşte **funcţia beta**, iar funcţia $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia (8.2) se numeşte **funcţia gama**. Funcţiile B şi Γ au fost introduse de Euler şi de aceea se mai numesc **integrale euleriene**.

Teorema 8.2. *a) Pentru $\forall\alpha > 0$ real, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ şi pentru $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$;*

b) $B(p,q) = B(q,p), \forall p,q > 0$;

c) $\Gamma(\alpha) > 0, \forall\alpha > 0$ şi $B(p,q) > 0, \forall p,q > 0$;

d) $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$;

e) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

*f) $\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \cdot \Gamma(2a)$ (**relaţia lui Legendre**)*

Corolarul 8.1. *Avem $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ şi $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$*

Soluţie. Aplic d) din Teorema 8.2 pentru $p = q = \frac{1}{2}$ şi obţinem

$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$

Pe de altă parte, $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cdot\cos t dt}{\sin t\cdot\cos t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$ (unde am folosit schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t$)

Atunci $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \pi$ şi, conform c) din Teorema 8.2, rezultă că $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Pentru a calcula integrala din enunţ facem substituţia $x^2 = t \Longrightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$ şi integrala devine $\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ □

8.2 Probleme rezolvate

Să se cerceteze convergenţa integralelor :

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ (integrala eliptică)

Soluţie. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1-x)(1+x)}} =$
$= \lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ integrala este convergentă □

2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Soluţie. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\alpha}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$ pentru $\alpha = 2 > 1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ integrala este convergentă □

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$

Soluţie. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}}{\sin x}\cos x = 1$, pentru $\alpha = 1 \Longrightarrow$ integrala este divergentă □

4. $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}$

Soluţie. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}} = \frac{x^{\alpha-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{2}{15}}+2x^{\frac{1}{20}}+1} = 1$,pentru
$\alpha = \frac{1}{5} < 1 \Longrightarrow$ integrala este convergentă □

5. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$

Soluţie. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\sin x}} = 1$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ integrala este convergentă

$\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\sin x}} = 1$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ integrala este convergentă □

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$

Soluţie. $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}} = \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-\frac{1}{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$, pentru $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ (deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{x} = 2$), deci integrala este convergentă □

7. $\int_1^\infty \left(\frac{x^2}{e^x-e^{-x}} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x^2} dx$

Soluţie. $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \left(\dfrac{x^2}{e^x-e^{-x}} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha-2} \cdot \left(\dfrac{x^2}{e^x-e^{-x}} + \dfrac{1}{2}\right) =$
$= \frac{1}{2}$, pentru $\alpha = 2 > 1 \Longrightarrow$ integrala este convergentă (am folosit $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{e^x-e^{-x}} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ cu regula lui l'Hospital) □

8. $\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-a)(x-b)}}, x_0 > a > b > 0$

Soluţie. $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x(x-a)(x-b)}} = 1$, pentru $\alpha = \frac{3}{2} > 1 \Longrightarrow$ integrala este convergentă □

9. $\int_0^\infty \frac{x}{1+[x]^2} dx$

Soluţie. Folosim inegalităţile $x - 1 < [x] \leq x$.Rezultă $[x]^2 \leq x^2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow [x]^2 + 1 \leq x^2 + 1 \Longrightarrow \frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{[x]^2+1} \Longrightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{[x]^2+1}$

Calculăm $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} dx = \lim\limits_{u\to\infty} \displaystyle\int_0^u \frac{x}{x^2+1} dx = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{2} \ln(u^2+1) =$
$= \infty$, deci $\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} dx$ este divergentă şi atunci $\int_0^\infty \frac{x}{1+[x]} dx$ este divergentă □

10. $\int_0^\infty e^{-3x} \sin(2x+1) dx$

Soluţie. Avem $|e^{-3x} \sin(2x+1)| \leq e^{-3x}$, deci $\int_0^\infty e^{-3x} dx =$
$= \lim\limits_{u\to\infty} \displaystyle\int_0^u e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$. Aşadar,$\int_0^\infty e^{-3x} dx$ este convergentă , deci $\int_0^\infty e^{-3x} \sin(2x+1) dx$ este absolut convergentă □

11. $\int_1^\infty x^{-4} \sin x^4 dx$

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x^4 = t \Longrightarrow x = \sqrt[4]{t} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt$

Integrala devine $\int_1^\infty \frac{1}{t} \cdot \sin t \cdot \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{7}{4}}} dt$

Cum $|\frac{\sin t}{t^{\frac{7}{4}}}| \leq \frac{1}{t^{\frac{7}{4}}}$ şi $\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{7}{4}}}dt = -\frac{4}{3}t^{-\frac{3}{4}}/_1^\infty = \frac{4}{3}$, deci este convergentă , atunci şi $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{7}{4}}}dt$ este absolut convergentă , deci convergentă □

12. Să se determine convergenţa integralei $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, a > 0, \alpha > 0$ şi absolut convergenţa integralei pentru $\alpha = 1$.

Soluţie. Aplicăm criteriul lui Abel pentru $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, deci $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ este convergentă

Pentru $\alpha = 1$ studiem convergenţa integralei $\int_a^\infty |\frac{\sin x}{x}|dx$. Presupunem prin absurd că $\int_a^\infty |\frac{\sin x}{x}|dx$ este convergentă .

Deoarece $\sin^2 x \leq |\sin x|$, rezultă că $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx$ ar fi convergentă ,dar

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1}{x}dx - \int_a^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$$

şi $\int_a^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$ este convergentă conform criteriului lui Abel, iar $\int_a^\infty \frac{1}{x}dx$ e divergentă datorită criteriului cu α. Aşadar presupunerea e falsă , deci $\int_a^\infty |\frac{\sin x}{x}|dx$ nu este convergentă , adică integrala $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ nu e absolut convergentă . □

13. Să se calculeze $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$, arătându-se mai întâi că are sens.

Soluţie. Explicităm modulul şi integrala devine

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

Notăm cu I_1 prima integrală şi cu I_2 pe cea de-a doua.

Studiem convergenţa integralei I_1:

$\lim_{x\to 1}(1-x)^\alpha \cdot \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ integrala este convergentă

Studiem convergenţa integralei I_2:

$\lim_{x\to 1}(x-1)^\alpha \cdot \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$\lim_{x\to \infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = 1$, pentru $\alpha = 2 > 1$

Deci I_2 e convergentă .

Aşadar, $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$ este convergentă

In I_1 facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$ şi obţinem

$$I_1 = -\int_{\infty}^{1} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y^2-1}} = I_2,$$

deci $I = 2I_2$.

Pentru I_2 facem schimbarea $x+1 = \frac{1}{t} \Longrightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \Longrightarrow I_2 =$
$= -\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-2t}} = -\sqrt{1-2t}/_0^{\frac{1}{2}} = 1 \Longrightarrow I = 2$ □

14. Să se studieze convergenţa integralei I=$\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$, $a < b$ şi apoi să se calculeze.

Soluţie. $\lim\limits_{x\to b}(b-x)^\alpha\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}} = \sqrt{b-a}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ integrala este convergentă

Facem substituţia $x = a\cos^2 y + b\sin^2 y \Longrightarrow dx = (b-a)\sin 2y dy$

Obţinem
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(b-a)\sin^2 y}{(b-a)\cos^2 y}}(b-a)\sin 2y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{\cos y}(b-a)2\sin y\cos y dy =$
$= 2(b-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y dy = (b-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2y)dy = \frac{\pi}{2}(b-a)$ □

15. Să se studieze convergenţa integralei $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$ şi apoi să se calculeze.

Soluţie. $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \cdot \dfrac{1}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}} = -\dfrac{1}{4}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^\alpha \cdot \dfrac{1}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}} = -\dfrac{1}{3}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Deci I este convergentă .

Facem substituţia $\frac{1-x}{x} = t^2 \Longrightarrow x = \frac{1}{1+t^2} \Longrightarrow dx = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$ şi obţinem $I = \int_0^\infty \frac{1+t^2}{-4t^4-8t^2-3}dt$. Integrală ce se rezolvă prin descompunerea în fracţii simple. □

16. (**Formula lui Froullani**) Fie $0 < a < b$ şi fie $f : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi mărginită astfel încât integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}dt$ este convergentă

Să se demonstreze egalitatea:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

Soluţie. Vom demonstra mai întâi egalitatea:

$$\int_u^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \int_{bu}^{au} \frac{f(t)}{t}dt\ ,\ \forall u > 0.\ (*)$$

Fie $u > 0$; cu schimbarea de variabilă $bx = t$, obţinem:

$$\int_u^\infty \frac{f(bx)}{x}dx = \int_{bu}^\infty \frac{f(t)}{t}dt.$$

Analog, se demonstrează şi egalitatea:

$$\int_u^\infty \frac{f(ax)}{x}dx = \int_{au}^\infty \frac{f(t)}{t}dt.$$

Prin scăderea membru cu membru a celor două egalităţi rezultă egalitatea $(*)$. Demonstrăm acum formula lui Froullani; folosind egalitatea $(*)$, avem:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_u^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au}\frac{f(t)}{t}dt.$$

Pentru a calcula ultima integrală considerăm funcţia

$$h(u) = \sup_{t\in[au,bu]} |f(t)-f(0)|.$$

Din continuitatea funcţiei f, rezultă $\lim_{u\to 0} h(u) = 0$. Evident, avem:

$$\int_{bu}^{au}\frac{f(t)}{t}dt = \int_{bu}^{au}\frac{f(t)-f(0)}{t}dt + \int_{bu}^{au}\frac{f(0)}{t}dt.$$

Prima integrală tinde la 0 pentru $u \mapsto 0$:

$$\left|\int_{bu}^{au}\frac{f(t)-f(0)}{t}dt\right| \leq \int_{bu}^{au}\frac{|f(t)-f(0)|}{t}dt \leq$$

$$\leq \int_{bu}^{au}\frac{h(u)}{t}dt = h(u)\ln\frac{a}{b} \mapsto 0 \text{ atunci când } u \mapsto 0.$$

In concluzie:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au}\frac{f(t)}{t}dt = \lim_{u\to 0}\int_{bu}^{au}\frac{f(0)}{t}dt = f(0)\ln\frac{a}{b}.$$

□

17. Fie $0 < a < b$; să se calculeze integralele:
a. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$.
b. $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx$.

Soluţie. Se aplică formula lui Froullani. □

18. Fie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ln(1+xy), & x \in (0,\infty) \times [0,\infty) \\ y, & x = 0, y \in [0,\infty) \end{cases}$$

Să se calculeze derivata funcţiei $F(y) = \int_0^y f(x,y)dx, y \in [0,\infty)$.

Soluţie. Funcţia f este continuă pe $(0,\infty) \times [0,\infty)$ şi studiem continuitatea în punctele $(0, y_0)$.

$\lim\limits_{x\to 0, y\to y_0} \frac{1}{x}\ln(1+xy) = \lim\limits_{x\to 0, y\to y_0} \frac{\ln(1+xy)}{xy} \cdot y = y_0 = f(0,y_0)$, deci f este continuă în punctele $(0, y_0)$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{1+xy}, & x \in (0,\infty) \times [0,\infty) \\ 1, & x = 0, y \in [0,\infty) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0, y\to y_0} \frac{1}{1+xy} = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0)$, deci $\frac{\partial f}{\partial y}$ e continuă pe $[0,\infty)\times[0,\infty)$

$\alpha(y) = 0, \beta(y) = y$ sunt de clasă $C^1([0,\infty))$

Conform teoremei 8.1, F e derivabilă şi $F'(y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx +$
$+ f(y,y) = \int_0^y \frac{1}{1+xy}dx + \frac{1}{y}\cdot\ln(1+y^2) = \frac{1}{y}\cdot\ln(1+xy)/_0^y + \frac{1}{y}\cdot\ln(1+y^2) =$
$= \frac{2}{y}\cdot\ln(1+y^2)$ □

Să se calculeze integralele, folosind derivarea sub semnul integral:

19. $I(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2\sin^2 x)dx, m \in \mathbb{R}_+$

Soluţie. Funcţia $f(x,m) = \ln(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)$ e continuă şi admite o derivată parţială continuă în raport cu m.

Avem $I'(m) = 2m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2\sin^2 x}dx$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x = t$ şi obţinem:

$I'(m) = 2m\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+m^2t^2)(1+t^2)}dt = \frac{\pi}{m+1}$ (se rezolvă prin descompunere în fracţii simple) $\Longrightarrow I(m) = \pi\ln(m+1) + c$. Cum $I(1) = 0 \Longrightarrow c =$
$= -\pi\ln 2 \Longrightarrow I(m) = \pi\ln\frac{m+1}{2}$ □

20. $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)dx, |r| < 1$

Soluţie. Funcţia $f(x,r) = \ln(1-2r\cos x + r^2)$ e continuă şi admite o derivată parţială continuă în raport cu r.

Avem $I'(r) = \int_0^\pi \frac{-2\cos x + 2r}{1 - 2r\cos x + r^2}dx$

Facem $x = 2y$ şi obţinem

$I'(r)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2\cos 2y+2r}{1-2r\cos 2y+r^2}\cdot 2dy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r-\cos 2y}{1-2r\cos 2y+r^2}dy$

Facem schimbarea $t=\operatorname{tg} y$ şi avem $I'(r)=4\int_0^{\infty}\frac{r-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-2r\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=$
$=4\int_0^{\infty}\frac{(r+1)(1+t^2)-2}{t^2(r+1)^2+(r-1)^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}dt=4\int_0^{\infty}\frac{r+1}{t^2(r+1)^2+(r-1)^2}dt-$
$-\frac{2(r+1)^2}{r}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+r)^2t^2+(r-1)^2}+\frac{2}{r}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=-\frac{4}{r-1}\operatorname{arctg}\frac{t(1+r)}{1-r}/_0^{\infty}-$
$-\frac{2(r+1)^2}{r}\cdot\frac{1}{r-1}\operatorname{arctg}\frac{r+1}{r-1}t/_0^{\infty}+\frac{2}{r}\operatorname{arctg} t/_0^{\infty}=0\Longrightarrow I(r)=c$, dar $I(0)=$
$=0\Longrightarrow c=0\Longrightarrow I(r)=0$, pentru $|r|<1$ □

21. $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2\theta)d\theta, a>1$

Soluţie. Funcţia $f(x,a)=\ln(a^2-\sin^2\theta)$ e continuă şi admite o derivată parţială continuă în raport cu a.

Avem $I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{a^2-\sin^2\theta}d\theta$

Facem schimbarea de variabilă $t=\operatorname{tg}\theta$ şi rezultă

$I'(a)=\int_0^{\infty}\frac{2a}{a^2-\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\infty}\frac{2a}{t^2(a^2-1)+a^2}dt=\frac{2a}{a^2-1}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+\frac{a^2}{a^2-1}}dt=$
$=\frac{2a}{a^2-1}\cdot\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\cdot\operatorname{arctg} t\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}/_0^{\infty}=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\Longrightarrow$
$=I(a)=\int\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}da=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+c$

Pentru a determina constanta c scriem integrala $I(a)$ sub forma

$I(a)=\pi\ln a+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{\sin^2\theta}{a^2}\right)d\theta\Longrightarrow c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{\sin^2\theta}{a^2}\right)d\theta-$
$-\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}$

Trecem la limită când $a\longrightarrow\infty$.

Intrucât $\left|\ln\left(1-\frac{\sin^2\theta}{a^2}\right)\right|\le\left|\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\right|$, integrala tinde la 0 şi găsim $c=-\pi\ln 2$

Deci $I(a)=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$ □

22. $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx, |a|<1$

Soluţie. Funcţia $f(x,a)=\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}$ e continuă şi admite o derivată parţială continuă în raport cu a.

Avem $I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a\cos x}$

Facem schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ şi obţinem:

$I'(a)=\int_0^1\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=2\int_0^1\frac{dt}{t^2(1-a)+1+a}=\frac{2}{1-a}\int_0^1\frac{dt}{t^2+\frac{1+a}{1-a}}=\frac{2}{1-a}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot$
$\cdot\operatorname{arctg}\left(t\cdot\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)/_0^1=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\Longrightarrow$
$\Longrightarrow I(a)=2\int\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}da$

Pentru a rezolva această integrală facem schimbarea de variabilă $a = \cos u$ şi obţinem:

$I(a) = 2\int \frac{1}{\sin u} \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} \cdot (-\sin u)du = -2\int \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}du =$

$= -2\int \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}}{1+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}}}du = -2\int \operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}}du = -2\int \frac{u}{2}du =$

$= -\frac{u^2}{2} + c \Longrightarrow I(a) = -\frac{(\arccos a)^2}{2} + c$, dar $I(0) = 0 \Longrightarrow c = \frac{\pi^2}{8} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow I(a) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{(\arccos a)^2}{2}$ □

23. $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-ax^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx, |a| < 1$

Soluţie. Funcţia $f(x,a) = \frac{\ln(1-ax^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ e continuă şi admite o derivată parţială continuă în raport cu a. Avem $I'(a) = -\int_0^1 \frac{x^2}{(1-ax^2)\sqrt{1-x^2}}dx$

Facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$ şi obţinem:

$I'(a) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{(1-a\sin^2 t)\cos t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1-a\sin^2 t}dt$

După o nouă schimbare de variabilă $u = \operatorname{tg} t$ obţinem:

$I'(a) = -\int_0^{\infty} \frac{\frac{u^2}{1+u^2}}{1-a\frac{u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{1}{1+u^2}du = -\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^2)[1+(1-a)u^2]}du =$

$= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+(1+a)u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} u/_0^{\infty} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-a} \cdot \sqrt{1-a} \cdot$

$\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{1-a} \cdot u/_0^{\infty} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a\sqrt{1-a}} \cdot \frac{\pi}{2} \Longrightarrow I(a) = \frac{\pi}{2}\int \frac{da}{a} -$

$-\frac{\pi}{2}\int \frac{da}{a\sqrt{1-a}} = \frac{\pi}{2} \cdot \ln a - \frac{\pi}{2} \cdot \ln\frac{1-\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a}} + c = \frac{\pi}{2}\ln a \cdot \frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}} =$

$= \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{1-a})^2 = \pi\ln(1+\sqrt{1-a})$ (am făcut schimbarea $\sqrt{1-a} = y$),dar $I(0) = 0 \Longrightarrow c = -\pi\ln 2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow I(a) = \pi\ln(1+\sqrt{1-a}) - \pi\ln 2$ □

24. $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

Soluţie. Se consideră $I(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x\sqrt{1-x^2}}dx, a > 0$

Funcţia $f(x,a) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}$ şi admite o derivată parţială continuă în raport cu a. Avem

$I'(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$ şi obţinem:

$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a^2\sin^2 t}$

Acum,cu o nouă schimbare $\operatorname{tg} t = u$ obţinem:

$I'(a) = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+a^2)u^2+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \Longrightarrow I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2}) + c$, dar $I(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{1+a^2})$

Pentru $a = 1 \Longrightarrow I = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$ □

25. Folosind posibilitatea permutării integralelor depinzând de un parametru, să se calculeze $\int_0^1 \varphi(x)dx$, unde $\varphi(x) = \frac{1}{\ln x}(x^b - x^a), x \neq 0, a, b > 0$ şi $\varphi(0) = 0$.

Soluţie. Observăm că $\varphi(x) = \int_a^b x^y dy, x \in [0,1]$

Considerând integrala cu parametru $F(y) = \int_0^1 x^y dx$, observăm că funcţia $f(x,y) = x^y$ este continuă pe $[0,1] \times [0,1]$.

Conform schimbării ordinei de integrare avem:

$\int_a^b F(y)dy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy\right) dx = \int_0^1 \varphi(x)dx$

Dar $F(y) = \int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1}x^{y+1}/_0^1 = \frac{1}{y+1}$,deci $\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_a^b \frac{1}{y+1}dy =$
$= \ln\frac{b+1}{a+1}$ □

Să se calculeze următoarele integrale,cu ajutorul funcţiilor Γ şi B:

26. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x dx$

Soluţie. Facem schimbarea $y = \sin^2 x \Longrightarrow dy = 2\sin x \cos x dx$ şi obţinem:

$I = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{3}{4}}(1-y)^{\frac{1}{4}}dy$

Deci $p - 1 = \frac{3}{4}, q - 1 = \frac{1}{4} \Longrightarrow p = \frac{7}{4}, q = \frac{5}{4} \Longrightarrow I = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{7}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{4}\Gamma(\frac{3}{4})\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{2!} = \frac{3}{64}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{64}$ □

27. Să se determine aria figurii mărginită de curba $r^4 = \sin^3\theta\cos\theta$.

Soluţie. Curba are 2 bucle, în primul cadran şi în al doilea cadran; este suficient să se dubleze aria uneia din aceste bucle. Folosim formula ariei în coordonate polare $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$

$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}d\theta =$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{1}{4}}dy = \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{1!} =$
$= \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ □

28. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx, n > \frac{1}{2}$

Soluţie. Facem schimbarea $y = \sin^2 x \Longrightarrow dy = 2\sin x\cos x dx$ şi obţinem:

$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \cos^{-1} x 2\sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{n-\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}dy =$
$= \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1\cdot\pi}{2^n n!} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ □

29. $I = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}$

Soluţie. Facem shimbarea $\cos\theta = 1 - 2\sqrt{x} \Longrightarrow -\sin\theta d\theta =$
$= -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = -\frac{1}{\sqrt{x}}dx \Longrightarrow d\theta = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sin\theta}dx$

Avem $\cos^2\theta = (1-2\sqrt{x})^2 \Longrightarrow \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-(1-2\sqrt{x})^2 =$
$= 4\sqrt{x} - 4x \Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{4\sqrt{x}-4x}$

Atunci $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-1+2\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\sqrt{x}-4x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{(1+\sqrt{x})(\sqrt{x}-x)}} =$
$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}(1-x)}}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) =$
$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\cdot\frac{1}{4}-1}}\Gamma(2\cdot\frac{1}{4})\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{4})}} =$
$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$ (am folosit relaţia lui Legendre) □

30. $\int_a^b (b-x)^{q-1}(x-a)^{p-1}dx, p,q\in\mathbb{R}_+$

Soluţie. Facem schimbarea $t = \frac{x-a}{b-a} \Longrightarrow x = a + t(b-a) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow dx = (b-a)dt$

Integrala devine $\int_0^1 (b-a)^{q-1}(1-t)^{q-1}t^{p-1}(b-a)^{p-1}(b-a)dt =$
$= (b-a)^{q+p-1}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = (b-a)^{p+q-1}B(p,q)$ □

31. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+1)^5(2-x)}}$

Soluţie. E caz particular al ex. precedent pentru $a=-1, b=2, q-1 =$
$= -\frac{1}{6}, p-1 = -\frac{5}{6}$

Deci $I = (2-(-1))^0 B\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2\pi$ □

32. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{n_1 x}\left(1+\frac{n_1}{n_2}e^{2x}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}dx, n_1, n_2\in\mathbb{N}^*$

Soluţie. Facem substituţia $y = \frac{n_1}{n_2}e^{2x} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1}y\right) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow dx = \frac{1}{2}y^{-1}dy$

Integrala devine $\int_0^\infty e^{n_1\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n_2}{n_1}y\right)}(1+y)^{\frac{n_1+n_2}{2}}\cdot\frac{1}{2}y^{-1}dy =$
$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{n_2}{n_1}y\right)^{\frac{n_1}{2}}(1+y)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}y^{-1}dy =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1}{2}}\int_0^\infty y^{\frac{n_1}{2}-1}(1+y)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}dy = \frac{1}{2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{n_1}{2}}B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)$ □

33. $\int_1^e \frac{1}{x}\ln^3 x(1-\ln x)^4 dx$

Soluţie. Facem schimbarea $\ln x = t \Longrightarrow x = e^t dt$ şi integrala devine $\int_0^1 e^{-t}t^3(1-t)^4e^t dt = \int_0^1 t^3(1-t)^4 dt = B(4,5) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(9)} = \frac{3!\cdot 4!}{8!}$ □

34. $\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}dx$

Soluţie. Facem schimbarea $\ln\frac{1}{x} = t \Longrightarrow x = e^{-t} \Longrightarrow dx = -e^{-t}dt$ şi integrala devine $\int_\infty^0 t^{\frac{1}{2}}(-e^{-t})dt = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$
$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ □

35. $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}$

Soluţie. Vom găsi o nouă formulă pentru $B(p,q)$:

In formula (8.1) facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y}{y+1}$ şi obţinem:

$B(p,q) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{y+1}\right)^{p-1}\cdot\frac{1}{(1+y)^{q-1}}\cdot\frac{dy}{(y+1)^2} = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(y+1)^{p+q}}dy$

Pentru problema noastră $p-1 = \frac{1}{4}, p+q = 2 \Longrightarrow p = \frac{5}{4}, q = \frac{3}{4}$

Aşadar $I = B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{1!} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ □

36. $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^4)^2}$

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x^4 = t \Longrightarrow x = t^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow dx = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt \Longrightarrow I = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{(1+t)^2}dt = \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(2)} =$
$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{1!} = \frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$ □

37. $\int_{-\infty}^\infty x^k\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx, n,k \in \mathbb{N}^*$

Soluţie. Pentru $k = 2p$, funcţia $f(x) = x^k \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ este pară, deci $I = 2\int_0^\infty x^k \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$

Facem substituţia $t = \frac{x^2}{n} \Longrightarrow x = \sqrt{n}t^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow dx = \frac{\sqrt{n}}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$

$I = 2\int_0^\infty (nt)^p(1+t)^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\sqrt{n}}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = n^{p+\frac{1}{2}} \int_0^\infty t^{p-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{n+1}{2}}dt =$
$= n^{p+\frac{1}{2}}B\left(p+\frac{1}{2}, \frac{n}{2} - p\right)$ cu condiţia $\frac{n}{2} - p > 0$

$B\left(p+\frac{1}{2}, \frac{n}{2} - p\right) = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2}-p)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$, unde $\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = (p+\frac{1}{2}-1)\cdot$
$\cdot(p+\frac{1}{2}-2)\ldots(p+\frac{1}{2}-p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}-p\right) = \frac{2p-1}{2}\cdot\frac{2p-3}{2}\cdot\ldots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$
$= \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)}{2^p}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{(2p-1)!!}{2^p}\cdot\sqrt{\pi}$

Pentru $k = 2p+1$, funcţia f este impară deci $I = 0$ □

38. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x^n = t \Longrightarrow x = t^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1-n}{n}}dt \Longrightarrow I = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^{\frac{1-n}{n}}}{\sqrt[n]{1-t}}dt = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt =$
$= \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{n-1}{n})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$ □

39. $\int_{-1}^\infty e^{-x^2-2x+3}dx$

Soluţie. $\int_{-1}^\infty e^{-(x+1)^2+4}dx = e^4\int_{-1}^\infty e^{-(x+1)^2}dx = e^4\int_0^\infty e^{-y^2}dy =$
$= e^4\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ □

8.3 Probleme propuse

Să se studieze convergenţa integralelor:

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$
   R: $\alpha = 4 > 1 \Longrightarrow$ convergentă

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$
   R: $\alpha = 2 > 1 \Longrightarrow$ divergentă

3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$
   R: $\alpha = \frac{1}{3} < 1 \Longrightarrow$ convergentă

4. $\int_0^1 \left[\frac{1}{x}\right] dx$
   R: divergentă

5. $\int_0^1 [\ln x] dx$

   R: convergentă

6. $\int_0^\infty [3e^{-2x}] dx$

   R: convergentă

7. $\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

   R: Calculăm $\lim\limits_{u\to 0} \displaystyle\int_u^1 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\sin 1 \Longrightarrow$ convergentă

8. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

   R: $\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{\frac{\pi}{2}}{x^3} \Longrightarrow$ convergentă

9. $\int_0^\infty e^{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{x^\lambda} dx, \lambda > 0$

   R: convergentă , cf. criteriului lui Abel, unde $f(x) = e^{\sin x} \cdot \sin 2x$, $g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$

   Să se studieze convergenţa şi să se calculeze:

10. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a < b$

    R: $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ convergentă

    Facem substituţia $x = a\cos^2 y + b\sin^2 y$

11. Fie $F(y) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2} dx, y > 0$ şi $F(0) = -1$. Să se arate că $F'(0) \neq \int_{0+0}^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln\sqrt{x^2+y^2}\right)_{y=0} dx$.

    Folosind posibilitatea de derivare sub semnul integral, să se calculeze:

12. $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x) dx, y \ge 0$.

    R: $F(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y+1)$

13. $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}, |a| < 1$

    R: $I(a) = \pi \arcsin a$

14. $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx, a^2 < 1$

    R: $I(a) = \pi(\sqrt{1-a^2} - 1)$

    Să se calculeze următoarele integrale cu ajutorul funcţiilor Γ şi B:

15. $\int_0^\infty e^{-x^p} dx, p > 0$

    R: $\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)$

16. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$

    R: $\frac{\pi}{8}$

17. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$

    R: $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

18. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$

    R: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

19. $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx, m, n > 0$

    R: $\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}, 0 < m < n$

20. $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^2}dx$

    R: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

21. $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-2x^2+x+1}dx$

    R: $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{9}{8}} \cdot \sqrt{2\pi}$

Capitolul 9

Integrale curbilinii

9.1 Noţiuni teoretice

Drumuri parametrizate

Definiţia 9.1. Fie J un interval real; se numeşte **drum parametrizat** pe J cu valori în $\mathbb{R}^n$ orice aplicaţie continuă $\gamma : J \mapsto \mathbb{R}^n$.

Definiţia 9.2. Dacă notăm $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., \gamma_n(t))$, atunci relaţiile

$$x_1 = \gamma_1(t),\ x_2 = \gamma_2(t), ..., x_n = \gamma_n(t)$$

se numesc **ecuaţiile parametrice** ale drumului γ.

Definiţia 9.3. Dacă $J = [a,b]$, atunci $\gamma(a)$ şi $\gamma(b)$ se numesc **capetele** (extremităţile) drumului. Drumul se numeşte **închis** dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Opusul drumului $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ este, prin definiţie,

$$\gamma^- : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n,\ \gamma^-(t) = \gamma(a+b-t).$$

Evident, γ şi γ^- au aceeaşi imagine.
Dacă $\gamma_1 : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [b,c] \mapsto \mathbb{R}^n$ sunt două drumuri parametrizate, atunci drumul concatenat $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,c] \mapsto \mathbb{R}^n$ este definit prin

$$\gamma_1 \cup \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c] \end{cases}$$

Imaginea lui $\gamma_1 \cup \gamma_2$ este reuniunea imaginilor drumurilor γ_1 şi γ_2.

Definiţia 9.4. Un drum $\gamma : J \mapsto \mathbb{R}^n$ se numeşte **neted** dacă aplicaţia γ este de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in J$.

Definiţia 9.5. Un drum se numeşte **neted pe porţiuni** dacă este concatenarea unui număr finit de drumuri netede.

Definiţia 9.6. Două drumuri $\gamma_1 : I \mapsto \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : J \mapsto \mathbb{R}^n$ se numesc **echivalente cu aceeaşi orientare** (notăm $\gamma_1 \sim \gamma_2$) dacă există un difeomorfism strict crescător $\phi : I \mapsto J$ astfel încât $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$. Dacă difeomorfismul de mai sus este strict descrescător, atunci cele două drumuri se numesc **echivalente cu orientări opuse**.

In cazurile particulare $n = 2$ (plan) şi $n = 3$ (spaţiu) notaţiile uzuale sunt $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ şi respectiv $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Lungimea unui drum neted $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ este:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Integrala curbilinie de prima speţă
Fie $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ un drum neted şi fie $f : D \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $D \supseteq \gamma([a, b])$. Integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei f pe drumul γ este, prin definiţie:

$$\int_\gamma f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri parametrizate echivalente (indiferent de orientare) atunci $\int_{\gamma_1} f ds = \int_{\gamma_2} f ds$.
Aplicaţii
i. Dacă f este funcţia constantă 1, atunci se obţine lungimea drumului γ.
ii. Dacă imaginea lui γ este un fir material având densitatea f, atunci masa M şi coordonatele centrului de greutate G sunt date de formulele:

$$\mathrm{M} = \int_\gamma f ds,$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int_\gamma x f ds,\ y_G = \frac{1}{M} \int_\gamma y f ds,\ z_G = \frac{1}{M} \int_\gamma z f ds.$$

Integrala curbilinie de speţa a doua
Fie $\alpha = P dx + Q dy + R dz$ o 1-formă diferenţială cu funcţiile P, Q, R continue pe un deschis $D \subseteq R^3$ şi fie

$$\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în D. Integrala curbilinie a formei diferenţiale α de-a lungul drumului γ este, prin definiţie:

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \left(P(\gamma(t)) x'(t) + Q(\gamma(t)) y'(t) + R(\gamma(t)) z'(t) \right) dt.$$

Definiţia se generalizează evident la n variabile. De exemplu, în două variabile:

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b \left(P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)\right) dt.$$

Dacă γ_1 şi γ_2 sunt două drumuri parametrizate echivalente cu aceeaşi orientare, atunci integralele corespunzătoare sunt egale:

$$\int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

Dacă cele două drumuri parametrizate sunt echivalente dar cu orientări opuse, atunci integralele corespunzătoare diferă prin semn.

Notaţii vectoriale

Unei 1-forme diferenţiale $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ i se asociază (în mod canonic) câmpul de vectori $\overline{V} : D \mapsto R^3$, $\overline{V} = (P, Q, R)$. Dacă γ este un drum parametrizat neted (cu imaginea inclusă în D), atunci integrala $\int_\gamma \alpha$ se mai notează şi $\int_\gamma \overline{V} d\overline{r}$, numindu-se circulaţia câmpului $\overline{V}$ de-a lungul drumului γ. In particular, dacă $\overline{V} = \overline{F}$ este un câmp de forţe, atunci circulaţia $\int_\gamma \overline{F} d\overline{r}$ este lucrul mecanic efectuat de forţa $\overline{F}$ pe drumul γ.

Forme diferenţiale exacte

Definiţia 9.7. O 1-formă diferenţială $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ se numeşte **exactă** pe mulţimea D dacă există f o funcţie (numită potenţial scalar sau primitivă) de clasă $C^1(D)$ astfel încât $Df = \alpha$, sau, echivalent:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P,\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial f}{\partial z} = R,$$

în orice punct din D. Câmpul de vectori $\overline{V} = (P, Q, R)$ asociat formei diferenţiale α se numeşte în acest caz **câmp de gradienţi**.

Definiţia 9.8. O 1-formă diferenţială $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ se numeşte **închisă** pe D dacă sunt verificate (în orice punct din D) egalităţile:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definiţiile de mai sus se generalizează în mod evident la n variabile. Importanţa formelor diferenţiale exacte este dată de următorul rezultat:

Teorema 9.1. *(Independenţa de drum a integralei curbilinii) Fie $\alpha = Df$ o 1-formă diferenţială exactă pe D şi fie γ un drum parametrizat neted cu imaginea inclusă în D având extremităţile $p, q \in D$; atunci:*

i. $\int_\gamma Df = f(q) - f(p)$.

ii. *dacă în plus drumul γ este închis, atunci $\int_\gamma Df = 0$.*

Din teorema de simetrie a lui Schwarz rezultă că orice formă diferenţială exactă (cu potenţialul scalar de clasă C^2) este în mod necesar şi închisă Reciproca acestei afirmaţii este, în general, falsă . De exemplu, forma diferenţială

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

este închisă pe $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ dar nu este exactă pe această mulţime.
Are loc totuşi următorul rezultat fundamental:

Teorema 9.2. *(**Teorema lui Poincare**) Fie α o 1-formă diferenţială de clasă C^1 inchisă pe deschisul $D \subseteq R^n$. Atunci pentru orice $x \in D$ există o veciătate deschisă a sa $U \subseteq D$ şi o funcţie $f \in C^1$ astfel încât $Df = \alpha$ pe U.*

Intr-o formulare succintă teorema afirmă că orice 1-formă diferenţială închiă este local exactă .

Există mulţimi pe care teorema de mai sus este adevărată global. De exemplu, dacă mulţimea D este stelată (adică există un punct $x_0 \in D$ cu proprietatea că segmentul $[x_0, x] \subseteq D, \forall x \in D$) atunci orice 1-formă diferenţială închisă pe D este exactă pe D.

9.2 Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa întâi :

1. $\int_C x ds, C : y = x^2, x \in [0,2]$

   Soluţie. Folosim formula de calcul a integralei curbilinii de prima speţă pentru curbe care nu sunt date parametric $C : y = \varphi(x),\ x \in [a,b]$:

   $$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}dx$$

   Avem $\int_C x ds = \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}dx$ (cu schimbarea $u = 1+4x^2$) □

2. $\int_C y^5 ds, C : x = \frac{y^4}{4}, y \in [0,2]$

   Soluţie. Analog cu exerciţiul 1:
   $\int_C y^5 ds = \int_0^2 y^5\sqrt{1+y^6}dy = \frac{1}{6}\int_0^2 6y^5\sqrt{1+y^6}dy =$
   $= \frac{1}{6}\int_0^{2^6}\sqrt{1+t}dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}/_0^{2^6} = \frac{1}{9}(\sqrt{65^3}-1)$ □

3. $\int_C z(x^2+y^2)ds, C : x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, t \in [0,1]$

Soluţie. $\int_C z(x^2+y^2)ds = \int_0^1 t(t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t)\cdot$
$\cdot\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}dt = \int_0^1 t^3\sqrt{2+t^2}dt =$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 u\sqrt{2+u}du = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(p^2-2)\cdot p\cdot 2pdp = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} p^2(p^2-2)dp =$
$= \frac{p^5}{5}/_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} - 2\frac{p^3}{3}/_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$ □

4. $\int_C x^2 ds, C : x^2+y^2 = 2, x\geq 0, y \geq 0$

Soluţie. Curba C reprezintă un sfert de cerc. Parametrizarea cercului este $x = \sqrt{2}\cos\theta, y = \sqrt{2}\sin\theta$, iar din $x \geq 0, y \geq 0 \Longrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$\int_C x^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\sqrt{2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta =$
$= \sqrt{2}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ □

5. $\int_C x^2 ds$, unde C este arcul de cerc definit prin intersecţia sferei $x^2+y^2+z^2 = a^2$ cu planul $y = x$, parcurs de la punctul $A(0,0,-a)$ la punctul $B(0,0,a)$.

Soluţie. Folosind coordonatele sferice găsim o reprezentare parametrică a arcului de cerc C:
$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta$
$y = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\theta$
$z = a\cos\theta$
unde $\rho = a, \varphi = \frac{\pi}{4}, \theta \in [0,\pi]$
$\int_C x^2 ds = \int_0^\pi \frac{a^2}{2}\sin^2\theta\sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\theta)^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}d\theta =$
$= \int_0^\pi \frac{a^3}{2}\sin^2\theta d\theta = \frac{a^3}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{a^3}{2}\left[\frac{1}{2}\theta/_0^\pi - \sin 2\theta/_0^\pi\right] = \frac{a^3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} =$
$= \frac{a^3\pi}{4}$ □

6. $\int_C xyds$, unde C este curba de intersecţie a suprafeţelor $x^2+y^2+z^2 = = a^2, x^2+y^2 = \frac{a^2}{4}$ situată în primul octant.

Soluţie. Curba este intersecţia dintre o sferă şi un cilindru şi o parametrizăm folosind coordonate cilindrice:
$x = \frac{a}{2}\cos\theta$
$y = \frac{a}{2}\sin\theta$
$z = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
unde $\rho = \frac{a}{2}$, z se obţine făcând sistem între cele două ecuaţii ale suprafeţelor şi păstrând doar valoarea pozitivă deoarece curba se află în primul octant, adică $z \geq 0$, iar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ deoarece $x \geq 0, y \geq 0$, curba fiind în primul octant

$\int_C xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{4}\cos\theta\sin\theta\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2}d\theta =$
$= \frac{a^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{a^3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta = \frac{a^3}{16}(\frac{-\cos 2\theta}{2})/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{16}$ □

7. Să se calculeze lungimea arcului de curbă dat prin $y = \text{ch}x$, $0 \le x \le \ln 2$.

Soluţie. $l = \int_C ds = \int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\text{sh}^2 x}dx = \int_0^{\ln 2}\text{ch}x dx =$
$= \text{sh}x/_0^{\ln 2} = \frac{3}{4}$ □

8. Să se calculeze centrul de greutate al barei $y = a\text{ch}\frac{x}{a}, 0 \le x \le a$.

Soluţie. $x_G = \frac{\int_C xds}{\int_C ds} = \frac{\int_0^a x\text{ch}\frac{x}{a}dx}{\int_0^a \text{ch}\frac{x}{a}dx} = \frac{ax\text{sh}\frac{x}{a}/_0^a - a\int_0^a \text{sh}\frac{x}{a}dx}{a\text{sh}\frac{x}{a}/_0^a} =$
$= \frac{a^2\text{sh}1 - a^2\text{ch}\frac{x}{a}/_0^a}{a\text{sh}1} = \frac{2a}{e+1}$
$y_G = \frac{\int_C yds}{\int_C ds} = \frac{a\int_0^a \text{ch}^2\frac{x}{a}dx}{a\text{sh}1} = \frac{\frac{a}{2}\int_0^a(\text{ch}\frac{2x}{a}+1)dx}{a\text{sh}1} = \frac{a(e^4-1+4e^2)}{4e(e^2-1)}$ □

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa doua:

9. $\int_C \frac{dx}{2a+y} - \frac{dy}{a+x}$, unde C este curba simplă care are drept imagine porţiunea din cercul $x^2+y^2+2ay = 0 (a > 0)$, pentru care $x+y \ge 0$ şi extremitatea iniţială în punctul $A_1(a,-a)$.

Soluţie. Cercul are centrul în punctul $(0,-a)$ şi raza a. Dreapta $x+$ $+y = 0$ este a doua bisectoare, iar inegalitatea $x+y \ge 0$ reprezintă semiplanul determinat de această dreaptă , care conţine punctul $(1,1)$. Bisectoarea a doua taie cercul în punctele $A_1(a,-a)$ şi $O(0,0)$. Atunci, reprezentarea parametrică a curbei este

$x = a\cos t, y = -a + a\sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Integrala devine:

$I = \int_C \frac{dx}{2a+y} - \frac{dy}{a+x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-a\sin t}{a+a\sin t} - \frac{a\cos t}{a+a\cos t}dt$

Folosind identităţile

$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right) - 1$ şi $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$ obţinem

$I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})-1}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})} + \frac{2\cos^2\frac{t}{2}-1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right]dt =$

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \frac{1}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})} + 1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right]dt =$

$= -2t/_0^{\frac{\pi}{2}} - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)/_0^{\frac{\pi}{2}} + \text{tg}\frac{t}{2}/_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi + 2$ □

10. $\int_C xdy - ydx, C : x^2+y^2 = 4, y = \sqrt{3}x, x \ge 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Soluţie. $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, unde $C_1 : y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x \in [0, \sqrt{3}]$,
$C_2 : x = 2\cos t, y = 2\sin t, t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, $C_3 : y = x\sqrt{3}, x \in [0, 1]$
Atunci
$\int_C xdy - ydx = \int_{C_1} xdy - ydx + \int_{C_2} xdy - ydx + \int_{C_3} xdy - ydx =$
$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} [2\cos t \cdot 2\cos t - 2\sin t \cdot (-2\sin t)]dt +$
$+ \int_1^0 (x\sqrt{3} - x\sqrt{3})dx = \frac{2\pi}{3}$ □

11. $\int_C (y-2z)dx - (z-x)dy + (2x-y)dz$, unde C este curba simplă şi închisă care are drept imagine cercul din spaţiu aflat la intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ cu planul $x - y + z = 0$; are ambele capete în punctul $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; determină pe acest cerc sensul trigonometric direct (sau invers acelor de ceasornic) dacă privim dinspre partea pozitivă a axei Ox.

Soluţie. Proiecţia cercului dat pe planul xOy este o elipsă şi ecuaţia sa se obţine eliminând pe z între ecuaţiile $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ şi $x - y + z =$ $= 0$. Ecuaţia elipsei va fi
$x^2 + y^2 + (x - y)^2 = a^2 \iff x^2 - xy + y^2 = \frac{a^2}{2} \iff \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2 =$
$= \frac{a^2}{2}$.
Punând $x - \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t, t \in [0, 2\pi]$ obţinem o parametrizare parametrică a elipsei:
$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t, y = \frac{2a}{\sqrt{6}} \sin t, t \in [0, 2\pi]$
Inlocuind expresiile lui x şi y din reprezentarea de mai sus în ecuaţia planului $x - y + z =$ îl determinăm pe z ca funcţie de t şi obţinem reprezentarea curbei C:
$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t, y = \frac{2a}{\sqrt{6}} \sin t, z = \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, t \in [0, 2\pi]$
Avem
$\int_C (y - 2z)dx - (z - x)dy + (2x - y)dz =$
$= \int_0^{2\pi} [\frac{2a}{\sqrt{2}} \cos t \left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{a}{\sqrt{6}} \cos t\right) + \frac{2a}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \frac{2a}{\sqrt{6}} \cos t + \frac{2a}{\sqrt{2}} \cos t \cdot$
$\cdot \left(\frac{a}{\sqrt{6}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{2}} \sin t\right)]dt = \int_0^{2\pi} \frac{4a^2}{\sqrt{3}} \cos^2 t dt = \frac{4a^2}{\sqrt{3}}$ □

12. Folosind integrala curbilinie, să se calculeze aria buclei foliului lui Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Soluţie. Reprezentarea parametrică a curbei este
$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in [0, \infty)$ (aceasta se obţine intersectând curba dreapta $y = tx$)
Aria se calculează după formula $A = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx$

Avem
$A = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{3at}{1+t^3} \cdot \left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right)' - \frac{3at^2}{1+t^3} \cdot \left(\frac{3at}{1+t^3}\right)' dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} 9a^2 \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt =$
$= \frac{3a^2}{2}$ □

13. Să se calculeze $\int_\Gamma ydx + xdy$ pe un drum cu capetele $A(2,1)$ şi $B(1,3)$.

Soluţie. Forma diferenţială $\alpha = ydx + xdy$ este închisă pe $\mathbb{R}^2$ şi deci este exactă . Rezultă că integrala este independentă de drumul particular care uneşte
punctele A şi B. Integrala se calculează pe un drum particular, de exemplu pe segmentul $[AB]$, a cărui parametrizare este:

$$x(t) = \frac{5-t}{2},\ y(t) = t,\ t \in [1,3].$$

O altă metodă constă în a determina un potenţial scalar f pentru 1-forma diferenţială α:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} y_0 dx + \int_{y_0}^{y} x dy = xy + k,$$

k fiind o constantă arbitrară . Integrala cerută în enunţ este:

$$\int_\Gamma \alpha = f(B) - f(A) = 1,$$

Γ fiind un drum arbitrar având capetele A şi B.

□

14. Fie $P, Q, R : \Omega = \{(x,y,z)\,;\, y > 0, z \geq 0\} \mapsto R$,

$$P(x,y,z) = x^2 - yz + \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$Q(x,y,z) = y^2 - zx - \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$R(x,y,z) = z^2 - xy.$$

Notând cu $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, să se calculeze $\int_\Gamma \omega$, unde Γ este un drum parametrizat arbitrar (inclus în Ω) ce uneşte punctele $A(1,1,0)$ şi $B(-1,1,0)$.

Soluţie. Observăm că ω este o 1-formă diferenţială închisă :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - z = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -y = \frac{\partial P}{\partial z},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Domeniul Ω este stelat, aşadar ω este exactă pe Ω. Rezultă că $\int_\Gamma \omega$ nu depinde de drumul parametrizat Γ, ci doar de extremităţile A şi B şi de orientare (de la A către B).
Fie parametrizarea $x(t) = -t$, $y(t) = 1$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$; obţinem:

$$\int_\Gamma \omega = -\int_{-1}^{1} \left(t^2 + \frac{1}{t^2+1}\right) dt = -\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

Să mai facem observaţia că raţionamentul de mai sus nu mai este corect dacă drumul nu ar fi inclus în Ω, deoarece, pe un astfel de domeniu ω nu ar mai fi exactă şi deci integrala nu ar mai fi independentă de drum.
De exemplu, să considerăm punctele $C(1, -1, 0)$, $D(-1, -1, 0)$ şi drumul Γ_1 format prin concatenarea segmentelor (orientate) $[AC] \cup [CD] \cup [DB]$. Atunci $\int_{\Gamma_1} \omega \neq \int_\Gamma \omega$. Intr-adevăr, cu parametrizarea:
$[AC] : x(t) = 1$, $y(t) = -t$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$,
$[CD] : x(t) - t$, $y(t) = -1$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$,
$[DB] : x(t) = -1$, $y(t) = t$, $z(t) = 0$, $t \in [-1, 1]$.
se obţine:

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + 3\frac{\pi}{2}.$$

□

15. Fie $P, Q : R^2 \setminus \{(x, y) \mid xy = -1\} \mapsto \mathbb{R}$,

$$P(x, y) = \frac{y}{1+xy},\ Q(x, y) = \frac{x}{1+xy}$$

şi fie $\alpha = Pdx + Qdy$. Să se calculeze integrala $\int_\Gamma \alpha$, unde Γ este un drum arbitrar având capetele $A(-1, -1)$ şi $B(3, 3)$ şi nu intersectează hiperbola $xy = -1$.

Soluţie. Forma diferenţială α este închisă :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{(1+xy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq -1.$$

Mulţimea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\}$ este stelată , deci pe Ω α este exactă . Rezultă că integrala este independentă de drumul particular

(inclus în Ω) care uneşte punctele A şi B. Un potenţial scalar pentru α pe mulţimea Ω este:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_0}{1+xy_0}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x}{1+xy}dy = \ln(1+xy) + k, xy > -1,$$

şi deci integrala este:

$$\int_{\Gamma} \alpha = f(B) - f(A) = \ln 5.$$

□

Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integral este o diferenţială totală , să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

16. $\int_{\left(\frac{1}{3},-2\right)}^{(3,0)} \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy$,luată pe o curbă a cărei imagine nu intersectează hiperbola $xy = -1$.

Soluţie. Avem $P(x,y) = \frac{y}{1+xy}$ şi $Q(x,y) = \frac{x}{1+xy}(xy \neq -1)$
Mulţimea pe care sunt definite P şi Q nu formează un domeniu. Vom considera numai mulţimea D a punctelor din plan pentru care $xy+1 >$ > 0. Mulţimea D conţine punctele $A_1\left(\frac{1}{3},-2\right)$ şi $A_2(3,0)$, deoarece avem $\frac{1}{3}\cdot(-2)+1 = \frac{1}{3} > 0$ şi $3\cdot 0+1 = 1 > 0$. Această mulţime este un domeniu simplu conex, deci putem aplica teorema 11.2. Funcţiile P şi Q admit derivate parţiale continue pe D şi avem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} =$ $= \frac{1}{(1+xy)^2}$. In concluzie integrala nu depinde de drum. Pentru calculul ei trebuie să găsim o curbă care uneşte punctele A_1 şi A_2. Să observăm că nu putem lua curba care are drept imagine segmentul A_1A_2 şi nici curba care are drept imagine segmentul A_1A_3 reunit cu segmentul A_3A_1, unde $A_3(3,-2)$, deoarece aceste contururi intersectează hiperbola $xy = -1$. Dacă notăm $A_4\left(\frac{1}{3},0\right)$ se observă că segmentele A_1A_4 şi A_4A_2 nu intersectează hiperbola $xy = -1$. Să luăm curba simplă C care are drept imagine aceste segmente. Ea este reuniunea curbelor $C_1 : x = \frac{1}{3}, y = t, t \in [-2,0]$ şi $C_2 : x = t, y = 0, t \in \left[\frac{1}{3},3\right]$. Atunci

$\int_C \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy = \int_{C_1} \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy + \int_{C_2} \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy =$
$= \int_{-2}^{0} \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}t}dt + \int_{\frac{1}{3}}^{3} 0dt = \ln 3$ □

17. $\int_{(1,1,0)}^{(2,3,1)} yzdx + xzdy + xydz$

Soluţie. Funcţiile $p = yz, Q = xz, R = xy$ sunt definite şi admit derivate parţiale continue în tot spaţiul. Avem
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x$
deci expresia de sub semnul integral este o diferenţilă totală şi integrala curbilinie nu depinde de drum. Fie punctele $A_1(1,1,0)$, $A_2(1,1,1)$, $A_3(2,1,1)$, $A_4(2,3,1)$. Vom alege curba simplă care are drept imagine segmentele A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4 şi are primul capăt în punctul A_1. Ea este reuniunea curbelor

$C_1 : x = 1, y = 1, z = t, t \in [0,1]$,$C_2 : x = t, y = 1, z = 1, t \in [1,2]$,
$C_3 : x = 2, y = t, z = 1, t \in [1,3]$.

Atunci:

$\int_C \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy = \int_{C_1} \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy + \int_{C_2} \frac{y}{1+xy}dx + \frac{x}{1+xy}dy =$
$= \int_0^1 dt + \int_1^2 dt + \int_1^3 2dt = 6$ □

18. Să se stabilească domeniul în care expresia $P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$ $= \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} - x}dx + \sqrt{\sqrt{x^2+y^2} + x}dy$ este o diferenţială totală şi să se găsească o primitivă a ei în acest domeniu.

Soluţie. Funcţiile P şi Q sunt definite şi continue în tot planul. Pentru $y \neq 0$ ele admit derivate parţiale continue şi avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{|y|} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

Deoarece $\frac{y}{|y|} = 1$ numai pentru $y > 0$, rezultă că cele două derivate parţiale sunt egale numai în semiplanul superior, ce reprezintă domeniul căutat.

Fie (x', y') un punct din semiplanul superior şi $C(x', y') : x = x't, y =$ $= y't, t \in [0,1]$, o curbă care are ca imagine segmentul ce uneşte punctele $(0,0)$ şi (x', y'). O primitivă a expresiei diferenţiale din enunţ va fi dată de relaţia

$F(x', y') = \int_{C(x',y')} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$
$= \int_0^1 x'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2} - x'} + y'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2} + x'}\sqrt{t}dt =$
$= \frac{2}{3}(x'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2} - x'} + y'\sqrt{\sqrt{x'^2+y'^2} + x'})$ □

19. Stabilind în prealabil că expresia

$\left(\frac{z+xy}{xz} + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + x\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2+y^2}\right)dy + \frac{z-xy}{z^2}dz$,definită

pentru $x > 0, z > 0$, este o diferenţială totală , să se găsească o primitivă a ei.

Soluţie. Domeniul D definit de inegalităţile $x > 0, z > 0$ este simplu conex. Funcţiile

$P = \frac{z+xy}{xz} + \frac{y}{x^2+y^2}, Q = x\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x^2+y^2}\right), R = \frac{z-xy}{z^2}$ sunt continue şi admit derivate parţiale continue pe D. Avem

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{z} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{y}{z^2}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{x}{z^2}$

Rezultă că expresia dată este o diferenţială totală . Pentru calculul primitivei F vom lua punctul $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1) \in D$, punctul arbitrar $(x', y', z') \in D$ şi o curbă C cu extremitatea finală în (x', y', z'), compusă din reuniunea curbelor

$C_1 : x = t, y = 1, z = 1, t \in [1, x']$

$C_2 : x = x', y = t, z = 1, t \in [1, y']$

$C_3 : x = x', y = y', z = t, t \in [1, z']$

Atunci $F(x', y', z') = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} Pdx + Qdy + Rdz =$

$= \int_1^{x'} \left(\frac{1+t}{t} + \frac{1}{t^2+1}\right) dt + \int_1^{y'} x'\left(1 - \frac{1}{x'^2+t^2}\right) dt + \int_1^{z'} \frac{t-x'y'}{t^2} dt =$

$= (\ln t + t + \operatorname{arctg} t)/_1^{x'} + x't/_1^{y'} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x'}/_1^{y'} + \ln t/_1^{z'} + \frac{x'y'}{t}/_1^{z'} =$

$= \ln x'z' + \operatorname{arctg} x' + \operatorname{arctg} \frac{1}{x'} - \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'} + \frac{x'y'}{z'} - \frac{\pi}{4}$ □

20. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V}$ de-a lungul curbei Γ în următoarele cazuri:
a. $\overline{V} = -(x^2 + y^2)\overline{i} - (x^2 - y^2)\overline{j}$,
$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 4, \ y < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 - 2x = 0, y \geq 0\}$.
b. $\overline{V} = x\overline{i} + xy\overline{j} + xyz\overline{k}$,
$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x^2 + y^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x + z = 3\}$.

Soluţie. Câmpului de vectori $\overline{V} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ i se asociază , prin definiţie, 1-forma difereţială $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$; circulaţia lui $\overline{V}$ de-a lungul lui Γ este, prin definiţie integrala curbilinie: $\int_\Gamma \overline{V} d\overline{r} = \int_\Gamma \omega$.

a. Notăm:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 4, \ y < 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 - 2x = 0, \ y \geq 0\}.$$

O parametrizare (în sens trigonometric pozitiv) pentru Γ se obţine astfel:

$$\Gamma_1 : x(t) = 2\cos t,\ y(t) = 2\sin t,\ t \in [\pi, 2\pi),$$

$$\Gamma_2 : x(t) = 1 + \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, \pi].$$

b. Parametrizarea este: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = 3 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi)$.

□

9.3 Probleme propuse

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa întâi:

1. $\int_C \sqrt{y(2-y)}ds$, unde $C : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   R: $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

2. $\int_C (x+y)ds, C : y = x + 2, 0 \leq x \leq 1$
   R: $3\sqrt{2}$

3. $\int_C \sin x ds, C : y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
   R: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

4. $\int_C e^{x+y}ds$, unde C este curba simplă , închisă , rectificabilă şi orientată pozitiv care are ca imagine triunghiul din plan cu vârfurile $A_1(-1,-1), A_2(1,-1), A_3(1,1)$ şi ambele capete în punctul A_1.
   R: $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(e^2 - e^{-2})$

5. $\int_C z(x^2+y^2)ds$, unde $C : x = t\cos t, y = t\sin t, z = t, t \in [0, 1]$
   R: $\frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}$

6. $\int_C y ds, C : x^2 + y^2 = 1$
   R: 0

7. Să se calculeze masa şi centrul de greutate ale firului material omogen cu densitatea $\rho(x,y,z) = 1$ care este imaginea curbei $C : x = \sqrt{\pi^2 - t^2} \cdot \cos t, y = \sqrt{\pi^2 - t^2} \cdot \sin t, z = \sqrt{4\pi^2 - 1} \cdot \sqrt{\pi^2 - t^2}, t \in [-\pi, \pi]$
   R: $M = \frac{3\pi^3}{2}, x_G = -\frac{8}{3\pi^2}, y_G = 0, z_G = \frac{16}{9} \cdot \sqrt{4\pi^2 - 1}$
   Să se calculeze următoarele integrale de speţa a doua:

8. $\int_C xydx - y^2dy$, unde $C : x = t^2, y = t^3, t \in [0, 1]$
   R: $-\frac{1}{21}$

9. $\int_C xdy$, unde $C : x = e^t, y = \ln(1 + e^t), t \in [0, \ln 2]$
   R: $1 + \ln\frac{2}{3}$

10. $\int_C xdx + e^x dy$, unde $C : x = \ln(1 + t), y = \sqrt{1+t}, t \in [0, 1]$
    R: $\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

11. $\int_C (\arcsin y)dx + x^3 dy$, unde $C : x = -t, y = \sqrt{1 - t^2}, t \in [-1, 1]$
    R: $\frac{3\pi}{8} - 2$

12. $\int_C (x + y)dx - ydy, C : xy = 2, y = 2x, y = \frac{x}{2}, x \geq 0$
    R: $-\frac{15}{8} - 2\ln 2$

13. $\int_C \frac{x+y}{x-y}(xdx - ydy), C : x^2 + y^2 = 1, y = 0, y = x\mathrm{tg}\,\alpha, \alpha < \frac{\pi}{4}, x \geq 0$
    R: $\ln\sqrt{1 - \sin 2\alpha}$

14. $\int_C (y + 1)dx + x^2 dy$, unde C este curba simplă şi rectificabilă care are drept imagine porţiunea din parabola $y = x^2 - 1$, cuprinsă între punctele $A_1(1, 0)$ şi $A_2(-1, 0)$ şi primul capăt în punctul A_1.
    R: $-\frac{2}{3}$

15. $\int_C ydx - (x - a)dy$, unde C este curba simplă , închisă şi orientată pozitiv, care are drept imagine elipsa $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ şi ambele extremităţi în originea coordonatelor.
    R: $-2\pi ab$

16. $\int_C \sqrt{y^2 + z^2}dx + \sqrt{z^2 + x^2}dy + \sqrt{x^2 + y^2}dz$, unde C este curba simplă care are drept imagine segmentul din spaţiu AB, cu $A(-1, -1, -1)$ şi $B(2, 2, 2)$ şi primul capăt în punctul A.
    R: $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

17. $\int_C ydx + zdy + xdz$, unde C este curba simplă şi închisă care are drept imagine triunghiul din spaţiu ABC cu vârfurile $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$; are ambele capete în punctul A şi determină orientarea (A, B, C).
    R: $-\frac{3}{2}$

18. $\int_C \sqrt{1 - x^2}dx + xdy$, unde $C : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0$ parcursă în sens direct.
    R: π

19. Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integral este o diferenţială totală , să se calculeze următoarea integrală curbilinie,în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare $\int_{(2,1)}^{(1,3)} ydx + xdy$.
    R: 1

20. Stabilind în prealabil că expresia $(y^2-3x^2)dx+2xydy$ este diferenţială totală , să se găsească o primitivă a ei.

R: $F(x',y') = -x'^3 + x'y'^2$

Capitolul 10

Integrale duble

10.1 Noţiuni teoretice

Fie f o funcţie mărginită şi definită pe domeniul mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$. Se consideră o partiţie a planului în intervale bidimensionale, din care reţinem pe acelea ce conţin puncte din D. Notăm prin $\omega_k, k = \overline{1,n}$, intervalele bidimensionale reţinute, numerotate într-o ordine oarecare. Fie diviziunea Δ mulţimea acestor intervale. Norma diviziunii Δ notată $\nu(\Delta)$, este cea mai mare dintre dimensiunile intervalelor $\omega_k, k = \overline{1,n}$. Suma Riemann ataşată funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ a domeniului D este

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) aria(\omega_k), (\xi_k, \eta_k) \in \omega_k$$

Integrala dublă a funcţiei f extinsă la domeniul D este

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(f)$$

limita fiind aceeaşi pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_k, η_k).

Pentru calculul integralei duble se disting următoarele două tipuri fundamentele de domenii de integrare:

a) Domeniul D_y este **simplu în raport cu axa** Oy dacă este definit de inegalităţile $a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$,unde α şi β sunt funcţii continue pe $[a,b]$. Dacă f este continuă pe D_y, atunci

$$\int\int_{D_y} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dxdy$$

b) Domeniul D_x este **simplu în raport cu axa** Ox dacă este definit de inegalităţile $c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)$, unde γ şi δ sunt funcţii continue pe $[c,d]$. Dacă f este continuă pe D_x, atunci

$$\int\int_{D_x} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx$$

Schimbarea de variabile la integrala dublă Fie D' un domeniu compact în planul Ouv şi D un domeniu compact în planul Oxy. Fie T o transformare definită pe D' cu valorile pe D,dată de funcţiile reale φ şi ψ, de două variabile reale ,

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u, v), & (u, v) \in D' \\ y = \psi(u, v), & (u, v) \in D' \end{cases}$$

Presupunem că :

1° T este continuă pe D' şi biunivocă pe $Int(D')$

2° Funcţiile φ şi ψ au derivate parţiale continue şi mărginite pe $Int(D')$

3° Pe $Int(D')$, jacobianul transformării T este diferit de zero:

$J = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

Teorema 10.1. *(Teorema de schimbare de variabile la integrala dublă) Dacă f este o funcţie reală definită şi integrabilă Riemann pe D, avem*

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

Vom da câteva exemple de schimbări de variabile utilizate mai des:

a) Transformarea de la **coordonate polare** (notate cu θ şi ρ) la coordonatele carteziene:

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \theta, & (\theta, \rho) \in D' \\ y = \rho \sin \theta, & (\theta, \rho) \in D' \end{cases}$$

unde $D' = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 / \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ sau

$D' = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 / \rho \geq 0, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$

Jacobianul transformării, în modul, este $\left| \frac{D(x,y)}{D(\theta,\rho)} \right| = \rho$

b) Transformarea de la **coordonate polare generalizate** (notate cu θ şi ρ) la coordonatele carteziene:

$$T : \begin{cases} x = a\rho \cos^\alpha \theta, & \rho \geq 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ y = b\rho \sin^\alpha \theta, & \rho \geq 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

unde $a, b, \alpha > 0$

Jacobianul transformării, în modul, este $\left| \frac{D(x,y)}{D(\theta,\rho)} \right| = \alpha ab\rho \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta$

Pe lângă calculul ariilor domeniilor plane şi al volumelor, dăm şi următoarele aplicaţii ale integralelor duble:

a) Masa unei plăci plane D, de densitate $\rho(x, y) > 0$ este

$$M = \int\int_D \rho(x, y)dxdy$$

b) Coordonatele centrului de greutate G al unei plăci plane D, cu densitatea de masă $\rho(x,y) > 0$ sunt

$$x_G = \frac{1}{M}\int\int_D x\rho(x,y)dxdy, y_G = \frac{1}{M}\int\int_D y\rho(x,y)dxdy$$

c) Momentele de inerţie ale plăcii în raport cu axele de coordonate Ox şi Oy sunt respectiv

$$I_x = \int\int_D y^2\rho(x,y)dxdy, I_y = \int\int_D x^2\rho(x,y)dxdy$$

Momentul de inerţie al plăcii în raport cu originea este $I_O = I_x + I_y$

10.2 Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I = \int\int_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, dacă D este domeniul mărginit de dreptele $x = 0, y = 1, y = \sqrt[3]{2}, y = x$.

   Soluţie. Domeniul D este simplu în raport cu ambele axe. Vom considera domeniul D simplu în raport cu axa Ox şi vom integra în ordinea x, y, deoarece , în acest caz, reprezentările parametrice ale curbelor care mărginesc domeniul D au o expresie mai simplă .

   Proiecţia domeniului D pe axa Oy este intervalul $[1, \sqrt[3]{2}]$. Reprezentarea parametrică a curbei care îl mărgineşte la stânga este $x = 0, 1 \le y \le$ $\le \sqrt[3]{2}$, iar reprezentarea parametrică a curbei care îl mărgineşte la dreapta este $x = y, 1 \le y \le \sqrt[3]{2}$. Avem

   $I = \int_1^{\sqrt[3]{2}}\left(\int_0^y \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\right)dy =$
   $= \int_1^{\sqrt[3]{2}}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{2}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]/_0^y dy =$
   $= \int_1^{\sqrt[3]{2}}\frac{y^2}{2}(\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))dy = \frac{1}{6}[\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})]$ □

2. $I = \int\int_D(1-y)dxdy$, unde $D = \left\{x^2 + (y-1)^2 \le 1, y \le x^2, x \ge 0\right\}$

   Soluţie. Domeniul D este porţiunea cuprinsă între cercul cu centrul în punctul $B(0,1)$ şi raza 1 şi parabola $y = x^2$, din primul cadran; el este simplu în raport cu ambele axe. Vom integra în ordinea y, x, deci vom considera domeniul D simplu în raport cu axa Oy. Aflăm coordonatele punctului A de intersecţie a cercului cu parabola, rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

şi obţinem $A(1,1)$. Rezultă că proiecţia domeniului D pe axa Ox este intervalul $[0,1]$. Curba care mărgineşte inferior domeniul D este arcul de cerc OA, situat pe semicercul inferior; reprezentarea sa parametrică se obţine rezolvând în raport cu y ecuaţia cercului şi este $y = \alpha(x) = = 1 - \sqrt{1-x^2}, x \in [0,1]$

Curba care mărgineşte superior domeniul D este porţiunea din parabola $y = x^2$, cuprinsă între punctele O şi A, deci are reprezentarea parametrică $y = \beta(x) = x^2, x \in [0,1]$.

Reducem acum integrala dublă la o integrală iterată , în ordinea y, x:

$I = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2} (1-y)dy\right) dx = -\int_0^1 \frac{1}{2}(1-y)/_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2} dx =$
$= -\frac{1}{2}\int_0^1 [(1-x^2)^2 + x^2 - 1]dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (x^4 - x^2)dx = \frac{1}{15}$ □

3. $I = \int\int_D xydxdy$, unde D e domeniul limitat de curbele $xy = 1, x+y = = \frac{5}{2}$.

Soluţie. Curbele se intersectează în punctele $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ obţinute rezolvând sistemul

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Domeniul D este arcul hiperbolei echilatere $xy = 1$ cuprins între punctele A şi B şi segmentul din dreapta $x + y = \frac{5}{2}$ mărginit de punctele A şi B.

Atunci $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xydy\right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 x\frac{y^2}{2}/_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx$ etc. □

4. $I = \int\int_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy$, unde D e domeniul $x \in [-1,1], y \in [0,1]$.

Soluţie. Domeniul D este un dreptunghi care se scrie ca reuniunea dintre D_1 şi D_2, unde $D_1 = \left\{(x,y)/ -1 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\right\}$ şi $D_2 = \left\{(x,y)/ -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\right\}$.Atunci

$I = \int\int_D \sqrt{|y-x^2|}dxdy = \int\int_{D_1} \sqrt{x^2-y}dxdy + \int\int_{D_2} \sqrt{y-x^2}dxdy$

$\int\int_{D_1} \sqrt{x^2-y}dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y}dy\right) dx =$
$= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^0 -\sqrt{z}dz\right) dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}/_0^{x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{2}{3}x^3 dx = 0$

Analog $\int\int_{D_2} \sqrt{y-x^2}dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 \sqrt{y-x^2}dy\right) dx$ etc. □

5. $I = \int\int_D (|x| + |y|)dxdy$, unde $D : |x| + |y| \le 1$.

Soluţie. Domeniul D este un pătrat de vârfuri $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ şi se scrie ca reuniunea a patru domenii D_1,D_2,D_3,D_4, după cum x şi y se află în primul, al doilea, al treilea, respectiv al patrulea cadran.

Atunci

$I=\int\int_{D_1}(x+y)dxdy+\int\int_{D_2}(-x+y)dxdy+\int\int_{D_3}(-x-y)dxdy+$
$+\int\int_{D_4}(x-y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x+y)dy\right)dx+\int_{-1}^0\left(\int_0^{1+x}(-x+y)dy\right)dx+$
$+\int_{-1}^0\left(\int_{-1-x}^0(-x-y)dy\right)dx+\int_0^1\left(\int_{x-1}^0(x-y)dy\right)dx$ etc. □

6. $I=\int\int_D\frac{1}{\sqrt{x}}dxdy$, unde $D: y^2\leq 8x, y\leq 2x, y+4x\leq 24$.

Soluţie. Aflăm punctele de intersecţie dintre parabola $y^2=8x$ şi dreptele $y=2x$ şi $y+4x=24$, rezolvând sistemele

$$\begin{cases} y^2=8x \\ y=2x \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} y^2=8x \\ y+4x=24 \end{cases}$$

şi obţinem $O(0,0), A(2,4), B\left(\frac{9}{2},6\right), C(8,-8)$

$I=\int_0^2\left(\int_{-\sqrt{8x}}^{2x}\frac{1}{\sqrt{x}}dy\right)dx+\int_2^{\frac{9}{2}}\left(\int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}}\frac{1}{\sqrt{x}}dy\right)dx+\int_{\frac{9}{2}}^8\left(\int_{-\sqrt{8x}}^{24-4x}\frac{1}{\sqrt{x}}dy\right)dx=$
$=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x}}(2x+\sqrt{8x})dx+\int_2^{\frac{9}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{8x}+\sqrt{8x})dx+\int_{\frac{9}{2}}^8\frac{1}{\sqrt{x}}(24-4x+\sqrt{8x})dx$
etc. □

7. $I=\int\int_D ydxdy$, unde D este domeniul mărginit de parabola $y^2=$ $=2x$, cercul $x^2+y^2-2x=0$ şi dreapta $x=2$.

Soluţie. $I=\int_0^2\left(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}ydy\right)dx=\int_0^2\frac{y^2}{2}/_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{4}{3}$ □

Să se calculeze, trecând la coordonate polare, următoarele integrale duble:

8. $I=\int\int_D\frac{y^2}{x^2}dxdy$, unde $D=\left\{(x,y)/1\leq x^2+y^2\leq 2x\right\}$

Soluţie. Domeniul D e porţiunea din exteriorul cercului $x^2+y^2=1$ care se află în interiorul cercului $(x-1)^2+y^2=1$.

Trecem la coordonate polare $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ şi obţinem $1\leq$ $\leq\rho^2\leq 2\rho\cos\theta$, deci $\rho\in[1,2\cos\theta]$.Cum $\cos\theta\geq\frac{1}{2}$ avem $\theta\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$

Atunci $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2\cos\theta} \mathrm{tg}^2\theta \cdot \rho d\rho\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\theta - 1)\mathrm{tg}^2\theta d\theta =$
$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\sin^2\theta - \mathrm{tg}^2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [2(1-\cos 2\theta) - \mathrm{tg}^2\theta]d\theta = \theta/_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} -$
$-\frac{\sin 2\theta}{2}/_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}dt = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3} - \mathrm{arctg}\, t/_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3} -$
$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \pi - \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ □

9. $I = \int\int_D \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dxdy$, unde $D : x^2 + y^2 \le 1$.

Soluţie. $x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} = 0$ este un cerc de centru $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ şi rază $\frac{1}{2}$, iar $x^2 + y^2 = 1$ este un cerc cu centrul în $(0,0)$ şi de rază 1. Vom considera $D_1 : x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \le 0$ şi $D_2 = D \setminus D_1$.

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| = \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}, & \text{dacă } (x,y) \in D_2 \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2, & \text{dacă } (x,y) \in D_1 \end{cases}$$

Atunci $I = \int\int_{D_2} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) dxdy - \int\int_{D_1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) dxdy =$
$= \int\int_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) dxdy - 2\int\int_{D_1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) dxdy = I_1 -$
$-2I_2$

Calculăm I_1 folosind coordonatele polare $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$, $\rho \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi]$:
$I_1 = \int\int_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(\rho^2 - \rho\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2}}\right) \rho d\rho\right] d\theta =$
$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2}}\right) /_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2}}\right) d\theta = \frac{1}{4}\theta/_0^{2\pi} -$
$-\frac{1}{3\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\sin\theta/_0^{2\pi} - \cos\theta/_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$

Calculăm I_2 folosind coordonatele polare $x = \rho\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{2}}, y = \rho\sin\theta +$ $+\frac{1}{2\sqrt{2}}, \rho \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi]$:
$I_2 = \int\int_{D_1} \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) dxdy = \int_0^{2\pi} [\int_0^{\frac{1}{2}} (\rho^2\cos^2\theta + \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} +$
$+\rho^2\sin^2\theta + \frac{\rho\sin\theta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} - \frac{\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}})\rho d\rho] d\theta = \int_0^{2\pi} [\int_0^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - \frac{1}{4})\rho d\rho] d\theta =$
$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - \frac{1}{4})\rho d\rho = 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^4}{4}/_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\rho^2}{8}/_0^{\frac{1}{2}}\right) = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2^4 \cdot 4} - \frac{1}{2^2 \cdot 8}\right) =$
$= 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{64}\right) = -\frac{\pi}{32}$

Aşadar, $I = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{32}\right) = \frac{9\pi}{16}$ □

10. $I = \int\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, D : 4x^2 + y^2 \le 4, x^2 + y^2 \ge 1, y \ge 0$

Soluţie. Domeniul D este porţiunea aflată în exteriorul cercului de centru $(0,0)$ şi rază 1, în interiorul elipsei de semiaxe 1 şi 2 şi în semiplanul superior.

Trecem la coordonate polare $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$. Obţinem $4\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \le 4 \Longrightarrow \rho^2 \le \frac{4}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ şi $\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \ge$ ≥ 1, deci $\rho \in \left[1, \frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}}\right]$

Cum $y \ge 0$ avem $\sin\theta \ge 0$, deci $\theta \in [0,\pi]$

Atunci

$I = \int_0^\pi \left(\int_1^{\frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}}} \frac{\rho\sin\theta}{\rho}\cdot\rho d\rho\right) d\theta = \int_0^\pi \sin\theta\cdot\frac{\rho^2}{2}/_1^{\frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}}} d\theta =$
$\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{4\sin\theta}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_1^{-1}\frac{-4dy}{4y^2+1-y^2} - \frac{1}{2}(-\cos\theta)/_0^\pi =$
$= \int_{-1}^1 \frac{2dy}{3y^2+1} + 1 = 2\sqrt{3}\mathrm{arctg}\sqrt{3}y/_{-1}^1 + 1 = 2\sqrt{3}\cdot\frac{2\pi}{3} + 1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 1$ □

11. $\int\int_D e^{x^2+y^2}dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2+y^2 \le 1\}$

Soluţie. In coordonate polare domeniul de integrare este dreptunghiul $(\rho,\varphi) \in [0,2\pi) \times [0,1]$, şi deci:

$$\int\int_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho e^{\rho^2}d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{\rho^2}\Big|_0^1 d\varphi = \pi(e-1).$$

□

12. $\int\int_D \left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, $D = \{(x,y) \in R^2\,;\, x^2+y^2-y \le 0,\, x \ge 0\}$

Soluţie. Inlocuind pe x şi y în condiţiile ce definesc domeniul D, obţinem

$$\rho \le \sin\varphi,\ \cos\varphi \ge 0$$

şi deci

$$\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}),\ \rho \in [0,\sin\varphi].$$

Rezultă :

$$\int\int_D \left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \rho(1+\rho)d\rho = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{9}.$$

□

13. $\int\int_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, D fiind mărginit de curbele de ecua'tii

$$x^2+y^2 = e^2,\ y = x\sqrt{3},\ x = y\sqrt{3},\ x \ge 0.$$

Soluţie. Domeniul de integrare în coordonate polare este dreptunghiul $(\rho, \varphi) \in [0, e] \times [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, deci:

$$\int\int_D \ln(1 + x^2 + y^2)dxdy = \int_0^e d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho \ln(1 + \rho^2)d\varphi =$$

$$= \frac{\pi(1 + e^2)}{12}\left(\ln(1 + e^2) - 1\right) + \frac{\pi}{12}.$$

□

14. Să se calculeze, trecând la coordonate polare generalizate integrala $I = \int\int_D |xy|dxdy$, unde $D : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, x \geq 0$.

Soluţie. Folosim schimbarea $x = a\rho\cos\theta, y = b\rho\sin\theta, \theta \in [-\pi, \pi], \rho \geq$ ≥ 0. Jacobianul, în modul, al acestei transformări este $|J| = ab\rho$. In noile coordonate polare, ecuaţia curbei ce mărgineşte domeniul nostru este $\rho^4 = \rho^2\cos 2\theta$. Aşadar, $\rho \in [0, \sqrt{\cos 2\theta}]$. Condiţia $x \geq 0$ implică $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dar şi $\cos 2\theta \geq 0$, deci $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Integrala devine:

$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} a^2b^2\rho^3\cos\theta|\sin\theta|d\rho\right)d\theta =$

$= \frac{a^2b^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\cdot\cos\theta\cdot|\sin\theta|d\theta = \frac{a^2b^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\cdot\sin 2\theta d\theta = \frac{a^2b^2}{24}$ □

15. Să se determine aria mulţimii plane D mărginită de curba $(x^2+y^2)^2 =$ $= a(x^3 + y^3), a \in \mathbb{R}$.

Soluţie. In coordonate polare, ecuaţia curbei se scrie $\rho = a(\sin^3\theta +$ $+ \cos^3\theta)$.

Din ecuaţia curbei se constată că aria este situată în regiunea din plan pentru care $x + y \geq 0$ (deoarece $0 \leq (x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3) =$ $= a(x + y)(x^2 - xy + y^2)$),deci $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.Atunci aria va fi

$A = \int\int_D dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^{a(\sin^3\theta+\cos^3\theta)} \rho d\rho\right)d\theta =$

$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin^3\theta + \cos^3\theta)^2 d\theta = \frac{5\pi a^2}{16}$ □

16. Să se calculeze ariile mulţimilor plane D mărginite de curbele de ecuaţii:

a. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a$ şi b fiind două constante pozitive.

b. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2), x > 0,$ a fiind o constantă pozitivă .

c. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy,$ a fiind o constantă pozitivă .

Soluţie. **a.** Ecuaţia elipsei în coordonate polare generalizate, $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, este $\rho = 1$ şi deci obţinem:

$$\text{aria}(D) = \int\int_D dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab\rho d\rho = \pi ab.$$

b. Ecuaţia curbei în coordonate polare este $\rho^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, sau $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, şi deci domeniul de integrare în coordonate polare este

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \rho \in (0, a\sqrt{\cos 2\varphi}).$$

Rezultă :

$$\text{aria}(D) = \int\int_D dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = \frac{a^2}{2}.$$

c. Ecuaţia lemniscatei în coordonate polare este $\rho^2 = 2a^2\cos\varphi\sin\varphi$. Domeniul de integrare este $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $\rho \in (0, a\sqrt{\sin 2\varphi})$; obţinem:

$$\text{aria}(D) = \int\int_D dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2.$$

□

17. Cu ajutorul unor schimbări de variabile adecvate , să se calculeze integrala $I = \int\int_D x dxdy$, unde $D : 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, x \geq 0$.

Soluţie. Domeniul D este mărginit de hiperbolele echilatere $xy = 1$ şi $xy = 2$ şi de dreptele $y = x$ şi $y = 2x$. Vom face transformarea $T : u = xy, v = \frac{y}{x}, x > 0, y > 0$. Această transformare este regulată şi inversa sa este $T^{-1} : x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}, u > 0, v > 0$.

Imaginea domeniului D prin transformarea T este dreptunghiul Δ : $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2$ şi jacobianul transformării T^{-1} este $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} =$ $= \frac{1}{2v} \neq 0$. Aplicând formula de schimbare de variabile şi apoi iterând, obţinem

$I = \int\int_\Delta \sqrt{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u} du \cdot \int_1^2 \frac{1}{v\sqrt{v}} dv = \frac{1}{3}(5\sqrt{2} - 6)$ □

18. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ şi fie $f : D \mapsto [0, \infty)$ o funcţie continuă .
Să se calculeze volumul mulţimii

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (x, y) \in D,\, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

în următoarele cazuri:

a. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

b. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq x,\ y > 0\}$, $f(x, y) = xy$.

c. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1\}$, $f(x, y) = y$.

Soluţie. Volumul mulţimii Ω este dat de formula

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int_D f(x,y)dxdy$$

a. Trecând la coordonate polare, se obţine:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}\pi.$$

b. Cu aceeaşi metodă , se obţine:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, d\rho = \frac{1}{24}.$$

c. Cu schimbarea de variabile:

$$x = 1+\rho\cos\varphi,\ y = 1+\rho\sin\varphi,\ (\rho,\varphi) \in [0,1]\times[0.2\pi),$$

rezultă :

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int_D ydxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(1+\rho\sin\varphi)d\rho = \pi.$$

□

19. Găsiţi volumul corpului solid Ω ce se întinde deasupra planului xOy, sub planul $z = x$ şi sub cilindrul $x^2+y^2 = 4$.

Soluţie. Regiunea de bază R este un semicerc de rază 2,dar datorită simetriei putem integra peste primul cadran şi apoi dublăm rezultatul.
$V = \int\int_R zdxdy = 2\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} xdx\right) dy = \frac{16}{3}$ □

20. Găsiţi volumul solidului Ω mărginit de planele $z = 6, z = 2y$ şi de cilindrii parabolici $y = x^2, y = 2-x^2$.

Soluţie. Deoarece cilindrii parabolici sunt perpendiculari pe planul xOy.Solidul Ω are laturile verticale, deci ne putem gândi la Ω ca fiind între planele $z_1 = 6, z_2 = 2y$ şi deasupra regiunii R din planul xOy care e mărginit de parabolele $y = x^2, y = 2-x^2$. Parabolele se intersectează în punctele $(-1,1)$ şi $(1,1)$. Atunci volumul este
$V = \int\int_R (z_1-z_2)dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x^2} (6-2y)dy\right) dx = \frac{32}{3}$ □

21. Găsiţi volumul corpului solid Ω ce se află în interiorul sferei x^2+y^2+ $+z^2 = 4$ şi cilindrului $(x-1)^2+y^2 = 1$.

Soluţie. Integrăm funcţia $f(x,y) = (4-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ pe discul R mărginit de cercul cu centrul $(1,0)$ şi raza 1. Volumul cerut V e de două ori acela al părţii de deasupra planului xOy:

$V = 2\int\int_R \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$

Trecem la coordonate polare : $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, 0 \le \rho \le$ $\le 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ şi obţinem

$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta}(4-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\rho d\rho\right) d\theta = \frac{2}{3}$ □

22. Găsiţi volumul solidului mărginit deasupra de paraboloidul $z = 8-$ $-x^2 - y^2$ şi jos de paraboloidul $z = x^2 + y^2$.

Soluţie. Curba de intersecţie a celor doi paraboloizi se găseşte făcând sistem între ecuaţiile suprafeţelor şi rezultă $x^2 + y^2 = 4$. Deci solidul e deasupra discului $x^2 + y^2 \le 4$. Atunci

$V = \int\int_{x^2+y^2\le 4}(8-x^2-y^2-x^2-y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2(8-2\rho^2)\rho d\rho\right)d\theta =$ $= 16\pi$ □

23. Calculaţi volumul mărginit de suprafeţele $x^2 + z^2 = 2z, x^2 + z^2 =$ $= 3y, y = 0$.

Soluţie. $V = \int\int_D ydxdz$, unde D este domeniul mărginit de cercul $x^2 + z^2 = 2z, y = 0$, paraboloidul $x^2 + z^2 = 3y$ de rotaţie în jurul axei Oy, precum şi de cilindrul $x^2 + z^2 = 2z$. Trecând la coordonate polare $z = \rho\cos\theta, x = \rho\sin\theta, \rho \in [0, 2\cos\theta], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se obţine

$V = \frac{1}{3}\int\int_D(x^2+z^2)dxdz = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}\rho^3 d\rho\right)d\theta = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta =$ $= \frac{\pi}{2}$ □

24. Să se calculeze volumul mărginit de planul $z = 0$,de paraboloidul eliptic $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ şi de cilindrul drept ale cărui generatoare trec prin curba de intersecţie a sferei $x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$ cu paraboloidul dat.

Soluţie. $V = \int\int_D zdxdy = \int\int_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy$,
unde D este domeniul din planul xOy mărginit de elipsa obţinută prin intersecţia paraboloidului cu sfera $x^2 + y^2 + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - R\right)^2 = R^2$. Se face schimbarea de variabile $x = au\cos v, y = bu\sin v, J = abu$ de unde ecuaţia curbei C care limitează domeniul va fi $u^2 = 2R - a^2\cos^2 v-$ $-b^2\sin^2 v$. Deci

$V = ab\int_0^{2\pi}\left(\int_0^u u^3 du\right)dv = \frac{ab}{4}\int_0^{2\pi} u^4 dv =$ $= \pi\frac{ab}{2}\left[\left(2R - \frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 + \frac{(a^2-b^2)^2}{2}\right]$ □

25. Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu axele Ox şi Oy ale ariei cuprinse între curba $x^3 + y^3 = 3x^2$ şi axa Ox pentru $0 \le x \le 3$.

Soluţie. $I_x = \int\int_D y^2 dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt[3]{x^2(3-x)}} y^2 dy \right) dx = \frac{9}{4}$

$I_y = \int\int_D x^2 dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^{x^{\frac{2}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}}} dy \right) dx = \int_0^3 x^{\frac{8}{3}}(3-x)^{\frac{1}{3}} dx$

Se face schimbarea de variabilă $x = 3t$ şi se obţine

$I_y = 3^4 \int_0^1 t^{\frac{8}{3}}(1-t)^{\frac{1}{3}} dt = 3^4 B\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right) = 3^4 \frac{\Gamma(\frac{11}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(5)} =$

$= 3^4 \frac{\Gamma(3+\frac{2}{3})\Gamma(1+\frac{1}{3})}{4!} = 3^4 \frac{\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{24} = \frac{10}{3} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{20\pi}{3\sqrt{3}}$ □

26. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu originea unei plăci plane omogene mărginită de curbele $y = 0, x + y - 6 = 0, y^2 = 8x$.

Soluţie. Intersectând curbele obţinem punctele $O(0,0), A(6,0), B(0,6)$. Momentul de inerţie în raport cu originea este

$I_0 = \int\int_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{y^2}{8}}^{6-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy =$

$= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2) \right) /_{\frac{y^2}{8}}^{6-y} dy = \int_0^4 \left[\frac{(6-y)^3}{3} + y^2(6-y) - \frac{y^6}{3\cdot 8^3} - \frac{y^4}{8} \right] dy =$

$= 136 - \frac{128}{5} - \frac{32}{21}$ □

27. Să se afle coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene, mărginită de curbele $y^2 = 2ax, x^2 = 2ay$.

Soluţie. Din motive de simetrie coordonatele centrului de greutate se găsesc pe prima bisectoare, deci $x_G = y_G$, unde $x_G = \frac{\int\int_D x dxdy}{\int\int_D dxdy}$

$I_1 = \int_0^{2a} \left(\int_{\frac{x^2}{2a}}^{\sqrt{2ax}} x dy \right) dx = \frac{6}{5} a^3$

$I_2 = \int_0^{2a} \left(\int_{\frac{x^2}{2a}}^{\sqrt{2ax}} dy \right) dx = \frac{4}{3} a^2$

Deci $x_G = y_G = \frac{9}{10} a$ □

28. Să se calculeze cu o eroare mai mică decât 10^{-2} integralele:

a. $\int\int_A \frac{dxdy}{1+xy}$, $A = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$.

b. $\int\int_B \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}}$, $dxdy$, unde:

$$B = \{(x,y)\,;\, 1 \le x^2 + y^2 \le (e-1)^2\}.$$

Soluţie. **a.**

$$\int\int_A \frac{dxdy}{1+xy} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^1 \frac{dy}{1+xy} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+xy)}{x}\Big|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cong \frac{65}{144}.$$

b. Folosim coordonatele polare:

$$\int\int_B \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2)}} = 4\pi \int_1^{e-1} \frac{\ln\rho}{\rho-1} d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^{e-2} \frac{\ln(1+u)}{u} du = 4\pi \int_0^{e-2} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \rho^n d\rho =$$

$$= 4\pi \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n (e-2)^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

In continuare se aproximează suma seriei alternate obţinute. □

10.3 Probleme propuse

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I = \int\int_D xydxdy$, dacă D este domeniul limitat de parabola $y = x^2$ şi de dreapta $y = 2x+3$.
   R: $I = \int_{-1}^3 \left(\int_{x^2}^{2x+3} xydy\right) dx = 53 + \frac{1}{3}$

2. $I = \int\int_D \arcsin\sqrt{x+y}dxdy$, unde D este domeniul mărginit de dreptele $x+y=0, x+y=1, y=-1, y=1$.
   R: $I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-y}^{1-y} \arcsin\sqrt{x+y}dx\right) dy = \frac{\pi}{4}$

   Să se calculeze în coordonate polare următoarele integrale duble:

3. $I = \int\int_D \arcsin \frac{1}{2\pi}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} dxdy$, unde $D : \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq (2\pi)^2$
   R: $I = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \left(\arcsin\frac{\rho}{2\pi}\right) \rho d\rho = \pi^3 \left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $I = \int\int_D x e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, unde $D : a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2, -x \leq y \leq x$
   R: $I = \int_a^b \rho^2 e^{\rho} d\rho \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta = \sqrt{2}[e^b(b^2-2b+2) - e^a(a^2-2a+2)]$

5. $I = \int\int_D (x^2+y^2+xy-x-y)dxdy$, unde $D : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9, y \geq x \geq 0$
   R: $I = \int_2^3 d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\rho^3 + \rho^3 \frac{\sin 2\theta}{2} - \rho^2\cos\theta - \rho^2 \sin\theta) d\theta = \frac{65(\pi+1)}{16} - \frac{19}{3}$

6. Să se determine aria mulţimii plane D limitată de lemniscata lui Bernoulli $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$.

   R: Tinând cont de simetria lemniscatei în raport cu cele două axe de coordonate, aria este $A = 4\int\int_{D_1} dxdy$, unde prin trecere la coordonate polare obţinem $A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho d\rho\right) d\theta$ etc.

7. Cu ajutorul unor schimbări de variabile adecvate, să se calculeze integrala $I = \int\int_D (x+y)^4(x-y)^2 dxdy$, unde D : pătratul mărginit de dreptele $x+y=1, x+y=-1, x-y=-1, x-y=-3$.

   R: Fac transformarea $T : u = x+y, v = x-y$

8. Să se calculeze aria patrulaterului curbiliniu mărginit de parabolele $x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = cx, y^2 = dx, 0 < a < b, 0 < c < d$.

   R: Fac transformarea $T : u = \frac{x^2}{y}, v = \frac{y^2}{x}$ şi folosim formula $A =$ $= \int\int_D dxdy$

9. Presupunem că R e regiunea plană mărginită de hiperbolele $xy =$ $= 1, xy = 3, x^2-y^2 = 1, x^2-y^2 = 4$. Găsiţi momentul de inerţie $I_0 = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy$ al acestei regiuni.

   R: Fac transformarea $T : u = xy, v = x^2-y^2$ şi obţinem $I_0 = 3$

10. Găsiţi volumul V al solidului ce se întinde sub suprafaţa $z = 1+xy$ şi deasupra dreptunghiului $R : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$ din planul xOy.

    R: $V = \int_0^2\left(\int_0^1 (1+xy)dy\right) dx = 3$

11. Găsiţi volumul V al solidului mărginit inferior de planul xOy şi superior de paraboloidul $z = 25-x^2-y^2$.

    R: $V = 4\int_0^5\left(\int_0^{\sqrt{25-x^2}} (25-x^2-y^2)dy\right) dx = \frac{625\pi}{2}$

12. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafeţele $z = \alpha x, z =$ $= \beta x, x^2+y^2 = 2ax, 0 < \alpha < \beta, a > 0$.

    R: $V = \int\int_D (\beta-\alpha)xdxdy$, unde D este interiorul cercului $x^2+y^2 =$ $= 2ax$. Atunci $V = (\beta-\alpha)\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \rho(a+\rho\cos\theta)d\rho\right) d\theta = \pi(\beta-\alpha)a^3$

13. Să se calculeze volumul limitat de suprafeţele $z = x^2+y^2, y = x^2, y =$ $= 1, z = 0$.

    R: $V = \int_{-1}^1\left(\int_{x^2}^1 (x^2+y^2)dy\right) dx = \frac{88}{105}$

Capitolul 11

Integrale triple

11.1 Noţiuni teoretice

Fie $f(x, y, z)$ o funcţie mărginită pe domeniul mărginit $V \subset \mathbb{R}^3$. Se consideră o partiţie a spaţiului în intervale tridimensionale, din care reţinem pe acelea ce conţin puncte din V. Fie diviziunea $\Delta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, v_i, $i = \overline{1,n}$ fiind un astfel de interval. Norma diviziunii Δ, notată $\nu(\Delta)$, este cea mai mare dintre dimensiunile intervalelor $v_i, i = \overline{1,n}$. Suma Riemann ataşată funcţiei $f(x, y, z)$, corespunzătoare diviziunii Δ a lui V, este

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) vol(v_i), (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in v_i$$

Integrala triplă a funcţiei $f(x, y, z)$ extinsă la domeniul V este

$$\int\int\int_V f(x, y, z) dv = \lim_{\nu(\Delta) \to 0} \sigma_\Delta(f)$$

limita fiind aceeaşi pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_i, η_i, ζ_i).

De obicei calculul integralei triple se reduce la următoarele cazuri:

a) Domeniul V este cuprins între planele $z = c$ şi $z = d$ şi secţiunea cu planul $z = z_0, c \leq z_0 \leq d$ se proiectează în planul xOy după domeniul D_z. Atunci, dacă f este continuă în V, avem

$$\int\int\int_V f(x, y, z) dv = \int_c^d \left(\int\int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

b) Domeniul V este limitat de o suprafaţă cilindrică cu generatoarele paralele cu axa Oz (a cărui intersecţie cu planul xOy închide domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$), de suprafaţa inferioară $z = \varphi_1(x, y), (x, y) \in D$ şi de suprafaţa superioară $z = \varphi_2(x, y), (x, y) \in D$.

Dacă f este continuă în V, atunci

$$\int\int\int_V f(x, y, z) dv = \int\int_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Schimbarea de variabilă în integrala triplă Fie transformarea
$T: x = \varphi(u,v,w), y = \psi(u,v,w), z = \chi(u,v,w)$
pentru care funcţiile φ, ψ, χ satisfac condiţiile:

a) sunt funcţii continue împreună cu derivatele lor parţiale;

b) stabilesc o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă între punctele domeniului V din spaţiul $Oxyz$ şi punctele domeniului V' din spaţiul $O'uvw$;

c) determinantul funcţional $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ păstrează semn constant în V.

In condiţiile asupra transformării T, integrala triplă se transformă după formula

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dv = \int\int\int_{V'} f[\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)]|J|dv'$$

In cazul coordonatelor cilindrice ρ, θ, z cu $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z$, formula schimbării de variabile devine

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dv = \int\int\int_{V'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz$$

pentru coordonate sferice ρ, θ, φ cu $x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta$ avem

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dv = \int\int\int_{V'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

Aplicaţii a) Volumul corpului V este $vol(V) = \int\int\int_V dv$

b) Masa unui corp V şi coordonatele centrului de greutate G al corpului V, pentru densitatea de masă $\rho(x,y,z)$ sunt

$$M = \int\int\int_V \rho(x,y,z)dv$$

$$x_G = \frac{1}{M}\int\int\int_V x\rho(x,y,z)dv$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int\int\int_V y\rho(x,y,z)dv$$

$$z_G = \frac{1}{M}\int\int\int_V z\rho(x,y,z)dv$$

c) Momentele de inerţie în raport cu planele şi axele de coordonate au expresiile

$$I_{xOy} = \int\int\int_V z^2\rho(x,y,z)dv$$

$$I_{yOz} = \int\int\int_V x^2\rho(x,y,z)dv$$

$$I_{zOx} = \int\int\int_V y^2\rho(x,y,z)dv$$

$$I_{Ox} = \int\int\int_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_{Oy} = \int\int\int_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_{Oz} = \int\int\int_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv$$

11.2 Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale triple:

1. $I = \int\int\int_V \frac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^n}dxdydz$, unde $V: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le$ $\le z \le 1, n > 3$

   Soluţie. $I = \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^n}dz\right)dy\right]dx =$
   $= -\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xy}{(1+x^2+y^2+z^2)^{n-1}}/_0^1 dy\right)dx =$
   $= -\frac{1}{2(n-1)}\int_0^1 \left(\int_0^1 x\left[\frac{y}{(2+x^2+y^2)^{n-1}} - \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{n-1}}\right]dy\right)dx =$
   $= \frac{1}{4(n-1)(n-2)}\int_0^1 x\left[\frac{1}{(2+x^2+y^2)^{n-2}} - \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{n-2}}\right]/_0^1 dx =$
   $= \frac{1}{4(n-1)(n-2)}\int_0^1 x\left[\frac{1}{(3+x^2)^{n-2}} - \frac{2}{(2+x^2)^{n-2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{n-2}}\right]dx =$
   $= \frac{1}{8(n-1)(n-2)(n-3)}\left(1 + \frac{81}{3^n} - \frac{64}{4^n} - \frac{24}{2^n}\right)$ □

2. $I = \int\int\int_V \frac{1}{(a+x+y+z)^4}dxdydz, a > 0$, unde $V: x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+$ $+y+z \le a$

   Soluţie. $I = \int_0^a \left[\int_0^{a-x}\left(\int_0^{a-x-y}\frac{1}{(a+x+y+z)^4}dz\right)dy\right]dx =$
   $= -\frac{1}{3}\int_0^a \left(\int_0^{a-x}\frac{1}{(a+x+y+z)^3}/_0^{a-x-y}dy\right)dx =$
   $= -\frac{1}{3}\int_0^a \left(\int_0^{a-x}\left[\frac{1}{(2a)^3} - \frac{1}{(a+x+y)^3}\right]dy\right)dx =$
   $= -\frac{1}{3}\int_0^a \left[\frac{a-x}{(2a)^3} + \frac{1}{2(2a)^2} - \frac{1}{2(a+x)^2}\right]dx = \frac{1}{48a}$ □

3. $I = \int\int\int_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, unde V e limitat de suprafaţa conică $z =$ $= \sqrt{x^2+y^2}$ şi planul $z = a > 0$

   Soluţie. Proiecţia lui V pe planul xOy este discul $D: x^2+y^2 \le a^2, z =$ $= 0$. Obţinem
   $I = \int\int_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^a \sqrt{x^2+y^2}dz\right)dxdy =$
   $= \int\int_D [a\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)]dxdy =$
   $= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a (a\rho^2 - \rho^3 d\rho\right)d\theta = \frac{\pi a^4}{6}$ □

4. $I = \int\int\int_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, unde $V : x^2+y^2+z^2 \leq az$

Soluţie. Corpul este interiorul sferei cu centrul în $C\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$ şi raza $\frac{a}{2}$. Trecem la coordonate sferice $x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta, \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, deoarece $0 \leq x^2+y^2+z^2 \leq az$, deci $\cos\theta \geq 0$. Obţinem

$I = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos\theta}\rho^3\sin\theta d\rho\right)d\theta\right]d\varphi = \frac{\pi a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^4\theta d\theta =$
$= -\frac{\pi a^4}{10}\cos^5\theta\Big/_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{10}$ □

5. $I = \int\int\int_V zdxdydz$,unde $V : x^2+y^2+z^2 \leq a^2, x^2+y^2 \leq z^2, z \geq 0$

Soluţie. Intersecţia conului $x^2+y^2 = z^2$ şi a sferei $x^2+y^2+z^2 = a^2$ este un cerc situat în planul $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$, cu centrul în punctul $C\left(0,0,\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ şi raza $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Avem

$I = \int\int_D\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} zdz\right)dxdy = \frac{1}{2}\int\int_D(a^2-2x^2-2y^2)$, unde D este discul $x^2+y^2 \leq \frac{a^2}{2}$

Atunci $I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}(a^2\rho-2\rho^3)d\rho\right)d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$ □

6. $I = \int\int\int_V \frac{1}{(a^2+x^2+y^2-z)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$, unde $V : x^2+y^2 \geq az, x^2+y^2 \leq a^2, z \geq 0$

Soluţie. $I = \int\int_D\left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{a}}\frac{1}{(a^2+x^2+y^2-z)^{\frac{3}{2}}}dz\right)dxdy$, unde $D : x^2+y^2 \leq a^2$

Atunci

$I = -2\int\int_D[(a^2+x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{a})^{-\frac{1}{2}} - (a^2+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}]dxdy =$
$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^a\left[\frac{\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\rho}{\left[a^2+\left(1-\frac{1}{a}\right)\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right]d\rho d\theta = 4\pi a(\sqrt{2}-1)-$
$-\frac{4\pi a}{a-1}(\sqrt{2a^2-a}-a)$ □

7. $I = \int\int\int_V(x+y+z)^2dxdydz$, unde V este partea comună sferei $x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$ şi paraboloidului $x^2+y^2 = 2az$.

Soluţie. Cele două suprafeţe se intersectează după cercul $x^2+y^2 = 2a^2, z = a$. Corpul este cuprins între planele $z = 0$ şi $z = a\sqrt{3}$.

Secţiunea cu planul $z = ct$ este $D_z : x^2 + y^2 \le 2az, z \in [0, a]$ şi $x^2 + y^2 \le 3a^2 - z^2, z \in [a, a\sqrt{3}]$

Aşadar,

$I = \int_0^a \left(\int \int_{x^2+y^2 \le 2az} (x+y+z)^2 dxdy \right) dz +$
$+ \int_a^{a\sqrt{3}} \left(\int \int_{x^2+y^2 \le 3a^2 - z^2} (x+y+z)^2 dxdy \right) dz =$
$= \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2az}} (\rho \cos\theta + \rho \sin\theta + z)^2 \rho d\rho d\theta \right) dz +$
$+ \int_a^{a\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + z)^2 \rho d\rho d\theta \right) dz =$
$= \frac{1}{5}\pi a^5 \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$ □

8. $I = \int \int \int_V xydxdydz$, unde V este mărginit de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ şi planele $z = 0, z = 1, y = x, y = \sqrt{3}x$.

Soluţie. Trecem la coordonate cilindrice $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z, 0 \le \rho \le R, 0 \le z \le 1, \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ (deoarece $x \le y \le x\sqrt{3} \Longrightarrow \rho\cos\theta \le \rho\sin\theta \le \sqrt{3}\rho\cos\theta \Longrightarrow 1 \le \operatorname{tg}\theta \le \sqrt{3} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$)

$I = 2\int_0^R \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \rho^3 \cos\theta \sin\theta d\theta dz d\rho = 2\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^1 dz \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\sin\theta d\theta =$
$= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2\theta d\theta = \frac{R^4}{8}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right) \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{R^4}{8}\left[-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right)\right] =$
$= -\frac{R^4}{32}$ □

9. $\int \int \int_\Omega \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz,$
$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 ;\, y \ge 0,\, z \ge 0,\, x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \le 1\}$

Soluţie. Coordonatele sferice generalizate sunt:

$$x = a\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = c\rho\cos\theta,$$

având acelaşi domeniu maxim fiind $(\rho, \theta, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ şi jacobianul $J = abc\rho^2 \sin\theta$.

Pentru domeniul Ω vom lua $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, şi obţinem:

$$\int \int \int_\Omega \left(1 - x^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\pi 6\rho^2 \left(1 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \sin\theta d\varphi = 6\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho =$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t\, dt = 6\pi \int_0^\infty \frac{u^2}{(1+u^2)^4} du =$$

$$= 3\pi\left(-\frac{u}{3(1+u^2)^3}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{du}{3(1+u^2)^3}\right) = \pi\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^3} =$$
$$= \pi\left(\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^2} - \int_0^\infty \frac{u^2}{(1+u^2)^3}\,du\right) = \frac{3}{4}\pi\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{3}{16}\pi.$$

□

10. $\int\int\int_\Pi z\,dxdydz$,
$\Pi = \{(x,y,z)\in R^3\,;\, x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1\}$

Soluţie. Pentru Π, domeniul în coordonate sferice este

$$\varphi\in[0,2\pi),\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \rho\in[0,2\cos\theta)$$

şi deci:

$$\int\int\int_\Pi zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\sin\theta\cos\theta\,d\rho =$$
$$8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\sin\theta\,d\theta = \frac{4}{3}\pi.$$

□

11. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafeţele: $z=x^2+y^2, z= = 2x^2+2y^2, y=x, y=x^2$.

Soluţie. $vol = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_D\left(\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz\right)dxdy =$
$= \int\int_D(x^2+y^2)dxdy$, unde $D: y=x, y=x^2, 0\le x\le 1, x^2\le y\le x$
Atunci
$vol = \int_0^1\left(\int_{x^2}^x(x^2+y^2)dy\right)dx = \int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)/_{x^2}^x dx =$
$= \int_0^1\left(\frac{4x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx = \frac{3}{35}$ □

12. Să se afle volumul corpului definit de $x^2+y^2+z^2\le 18, x^2+y^2+z^2\ge \ge 8, x^2+y^2\le z^2, z>0$.

Soluţie. Intersectând sfera $x^2+y^2+z^2=18$ cu conul $z^2=x^2+y^2, z>0$ obţinem cercul $x^2+y^2=9, z=3$,cu centrul în punctul $C(0,0,3)$ şi raza $CA=3$
Avem $\operatorname{tg}\theta = \frac{CA}{OC} = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$
Folosind coordonate sferice $x=\rho\sin\theta\cos\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z= = \rho\cos\theta, 2\le\rho\le 3, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le\varphi<2\pi$ rezultă :
$vol = \int\int\int_V dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_2^3\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi =$
$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\int_2^3\rho^2 d\rho = 19\pi(2-\sqrt{2})$ □

13. Să se calculeze volumul cuprins între paraboloizii $x^2 + y^2 = 2 + z$, $x^2 + y^2 = 10 - z$.

Soluţie. Intersecţia celor doi paraboloizi este cercul $x^2 + y^2 = 6$ situat în planul $z = 4$.
$vol = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_{x^2+y^2\leq 6}\left(\int_{x^2+y^2-2}^{10-x^2-y^2} dz\right) dxdy =$
$= \int\int_{x^2+y^2\leq 6}(12-2x^2-2y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{6}}(12-\rho^2)\rho d\rho d\theta = 54\pi$ □

14. Să se calculeze volumul mărginit de suprafaţa $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$.

Soluţie. Trecând la coordonate sferice, ecuaţia suprafeţei se scrie $\rho = = a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}$
Din ecuaţia suprafeţei rezultă că dacă $a > 0$, trebuie ca $x \geq 0$, deci suprafaţa este situată în semispaţiul din faţa planului yOz, aşa că $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, \pi]$
Obţinem
$vol = \int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\sqrt[3]{\sin\theta\cos\varphi}} \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$
$= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{3}$ □

15. Să se calculeze volumele mulţimilor Ω mărginite de suprafeţele de ecuaţii:
a. $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$.
b. $z = x^2 + y^2 - 1$, $z = 2 - x^2 - y^2$.
c. $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 5 + x^2 + y^2$.
d. $x^2 + y^2 = 1$, $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.
e. $x^2 + y^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, $a \in (0, 1)$.
f. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = x^2$, $x \geq 0$.

Soluţie. **a.** Curba de intersecţie dintre elipsoid şi con este elipsa de ecuaţii

$$4x^2 + 2y^2 = 1,\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Proiecţia pe planul xOy a lui Ω este

$$D = \{(x, y)\,;\, 4x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

Rezultă :

$$\text{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy\int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{1-2x^2-y^2}} dz =$$

$$= \int\int_D \left(\sqrt{1-2x^2-y^2} - \sqrt{2x^2+y^2}\right) dxdy =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1-\frac{1}{2}\rho^2} - \sqrt{\frac{1}{2}\rho^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{2}}\rho\, d\varphi = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1).$$

b. Curba de intersecţie a celor doi paraboloizi este cercul de ecuaţii

$$x^2+y^2 = \frac{3}{2},\ z = \frac{1}{2}.$$

Proiecţia pe planul xOy a lui Ω este

$$D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \leq \frac{3}{2}\},$$

şi deci obţinem:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{x^2+y^2-1}^{2-x^2-y^2} dz =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\rho \int_0^{2\pi} (3-\rho^2)\rho\, d\varphi.$$

c. Curba de intersecţie dintre cei doi paraboloizi este cercul $x^2+y^2=1$ situat în planul $z=3$. Notând cu $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, rezultă :

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\frac{1}{2}(1+x^2+y^2)}^{4-x^2-y^2} dz =$$

$$= \int\int_D \frac{3}{2}(1-x^2-y^2)\, dxdy = \frac{3}{2}\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)\rho\, d\varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

d. Curba de intersecţie dintre cilindru şi con este cercul $x^2+y^2=1$ situat în planul $z=1$. Notând cu $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, rezultă :

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dz =$$

$$= \int\int_D \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (1-\rho)\,\rho\, d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

e. Proiecţia lui Ω pe planul xOy este

$$D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \leq 4a^2,\ x^2+(y-a)^2 \geq a^2,\ x > 0\},$$

şi deci obţinem:

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int\int\int_\Omega dxdydz = \int\int_D dxdy \int_0^{3-x-y} dz =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_{2a\sin\varphi}^{2a} \rho(3 - \rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\, d\rho.$$

f. Curba de intersecţie dintre sferă şi con este cercul $y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$, situat în planul $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Proiecţia mulţimii Ω pe planul yOz este discul $D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \le \frac{1}{2}\}$; rezultă :

$$\text{vol} = \int\int\int_{\Omega} dxdydz = \int\int_D dydz \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx =$$

$$= \int\int_D \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{y^2 + z^2}\right) dydz = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi.$$

□

16. Să se calculeze masa corpului V de densitate $\rho(x, y, z) = z$ mărginit de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = 24, x^2 + y^2 = 2z$.

Soluţie. Intersecţia celor două suprafeţe este cercul $x^2 + y^2 = 8$ situat în planul $z = 8$

$M = \int\int\int_V zdxdydz = \int\int_{x^2+y^2\le 8} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{24-x^2-y^2}} zdz\right) dxdy =$

$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+y^2\le 8} \left[24 - x^2 - y^2 - \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\right] dxdy =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \left(24 - \rho^3 - \frac{\rho^4}{4}\right) d\rho = \frac{176\pi}{3}$ □

17. Să se determine coordonatele centrului de greutate al unui corp omogen definit de $x^2 + y^2 \le 2z, x + y - z \le 0$.

Soluţie. $M = \int\int\int_V dxdydz = \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\le 0} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} dz\right) dxdy =$

$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\le 0} (2x + 2y - x^2 - y^2)dxdy =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3)d\rho = \pi$

(unde am folosit trecerea la coordonate polare $x = 1 + \rho\cos\theta, y = = 1 + \rho\sin\theta$)

$\int\int\int_V xdxdydz = \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\le 0} \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} xdz\right) dxdy =$

$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\le 0} x(2x + 2y - x^2 - y^2)dxdy =$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^2 - \rho^3)(1 + \rho\cos\theta)d\rho = \pi$

Deci $x_G = 1$

$\int\int\int_V ydxdydz = \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} ydz\right)dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0} y(2x+2y-x^2-y^2)dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2\rho^2-\rho^3)(1+\rho\sin\theta)d\rho = \pi$
Deci $y_G = 1$

$\int\int\int_V zdxdydz = \int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{x+y} zdz\right)dxdy =$
$= \frac{1}{2}\int\int_{x^2+y^2-2(x+y)\leq 0}\left[(x+y)^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{4}\right]dxdy$
Trecem la coordonate polare $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, \theta\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$,
$0\leq\rho\leq 2(\sin\theta+\cos\theta)$ şi obţinem
$\int\int\int_V zdxdydz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\rho\left(\rho^2+\rho^2\sin 2\theta - \frac{\rho^4}{4}\right)d\rho = \frac{5\pi}{3}$
Deci $z_G = \frac{5}{3}$ □

18. Să se afle masa şi să se determine poziţia centrului de greutate al sferei $x^2+y^2+z^2\leq 2az$,dacă densitatea în punctele sferei este invers proporţională cu distanţa de la aceste puncte la origine.

Soluţie. Densitatea în punctul $M_0(x,y,z)$ este $\rho(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Deci masa va fi
$M = k\int\int\int_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$
V este cuprins între planele $z=0$ şi $z=2a$, iar secţiunea cu planul $z = const$ este $x^2+y^2\leq 2az-z^2$. Aşadar,
$M = k\int_0^{2a}\left(\int\int_{x^2+y^2\leq 2az-z^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdy\right)dz =$
$= k\int_0^{2a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2az-z^2}}\rho(\rho^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho d\theta dz =$
$= k\int_0^{2a}\left[2\pi(\rho^2+z^2)^{\frac{1}{2}}/_0^{\sqrt{2az-z^2}}\right]dz = 2k\pi\int_0^{2a}(\sqrt{2az}-z)dz = \frac{4}{3}k\pi a^2$
Procedând analog se obţine
$z_G = \frac{k}{M}\int_0^{2a}\left(\int\int_{x^2+y^2\leq 2az-z^2} z\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdy\right)dz =$
$= \frac{2k\pi}{M}\int_0^{2a}(\sqrt{2a}z^{\frac{3}{2}} - z^2)dz = \frac{4}{5}a, x_G = y_G = 0$ □

19. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz al corpului omogen de densitate $\rho(x,y,z) = \rho_0$ mărginit de suprafeţele sferice $(S_1): x^2+y^2+z^2 = 2z$ şi $(S_2): x^2+y^2+z^2 = 1$.

Soluţie. Corpul este mărginit inferior de S_1 şi superior de S_2. Suprafeţele S_1 şi S_2 se intersectează după cercul $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$ din planul $z = \frac{1}{2}$.

$I_{Oz} = \int\int\int_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz = \rho_0 \int\int\int_V (x^2+y^2)dxdydz =$
$= \rho_0 \int\int_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}} \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz\right) dxdy =$
$= \rho_0 \int\int_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}} (x^2+y^2)z/_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy =$
$= \rho_0 \int\int_{x^2+y^2\leq\frac{3}{4}} (x^2+y^2)(2\sqrt{1-x^2-y^2}-1)dxdy =$
$= \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3}{4}} \rho^3(2\sqrt{1-\rho^2}-1)d\rho d\theta = \frac{53\rho_0\pi}{480}$ □

11.3 Probleme propuse

Să se calculeze următoarele integrale triple:

1. $I = \int\int\int_V xyzdxdydz$, unde $V: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$
   R: $I = \frac{1}{8}a^2b^2c^2$

2. $I = \int\int\int_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, unde V este interiorul elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
   R: $I = \frac{\pi^2 abc}{4}$

3. $I = \int\int\int_V zdxdydz$, unde $V: z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2+y^2), z=0, z=h$
   R: $I = \frac{\pi}{4}a^2h^2$

4. $I = \int\int\int_V [x^2+y^2+(z-2)^2]^{-\frac{1}{2}}dxdydz$, unde $V: x^2+y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$
   R: $I = \pi\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3} + 3\sqrt{10} - \sqrt{2} - 8\right)$

5. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafaţa $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.
   R: $vol = \frac{\pi^2 abc}{4}$

6. Să se determine volumul corpului omogen mărginit de sfera $x^2+y^2+z^2=4$ şi paraboloidul $x^2+y^2=3z$.
   R: $vol = \int\int_{x^2+y^2\leq 3}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right) dxdy$ etc.

7. Să se calculeze masa corpului mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 = 1$, ştiind că densitatea lui variază după legea $\rho(x,y,z) = k|z|, k$ constantă .

   R: $M = 3k\pi$

8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al corpului omogen de densitate $\rho(x, y, z) = 1$ mărginit de suprafeţele $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9}, z = 0, z = 3$.

   R: $x_G = y_G = 0, z_G = \frac{9}{4}$

Capitolul 12

Integrale de suprafaţă

12.1 Noţiuni teoretice

I.Integrale de suprafaţă de prima speţă . Fie Σ o suprafaţă regulată dată prin $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Fie $\Delta = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ o diviziune a suprafeţei Σ, realizată prin reţeaua curbelor coordonate, $s_i, i = \overline{1,n}$, fiind porţiunile elementare de suprafaţă . Fie d_i diametrul celei mai mici sfere ce conţine elementul de suprafaţă s_i. Norma diviziunii Δ este numărul $\nu(\Delta) = \max\limits_{1\leq i\leq n} d$. Fie punctul $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in s_i$, ales arbitrar.

Fie $F(x,y,z)$ o funcţie continuă pe Σ. Se numeşte **integrală de suprafaţă de prima speţă** ,numărul real

$\int\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma = \lim\limits_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(F), \sigma_\Delta(F) = \sum\limits_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)s_i,$

limita fiind aceeaşi pentru orice alegere a punctelor intermediare. Valoarea integralei de suptafaţă de prima speţă este independentă de alegerea suprafeţei de integrare.

Integrală de suprafaţă de prima speţă se calculează după formula

$$\int\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma = \int\int_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}dudv,$$

unde

$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$

$F = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$

$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$

reprezintă coeficienţii primei forme fundamentale a suprafeţei.

Dacă suprafaţa regulată Σ este dată sub forma explicită $z = f(x,y)$,

$(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, atunci

$$\int\int_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \int\int_{D} F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

II.Integrale de suprafaţă de speţa a doua. Fie funcţiile $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ continue în punctele suprafeţei Σ. Fie Σ_+ faţa suprafeţei regulate Σ, definită de versorul normalei $n(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Integrala de suprafaţă de speţa a doua se reduce la o integrală de suprafaţă de speţa întâi

$$\int\int_{\Sigma_+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int\int_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma$$

Aplicaţii

a) Aria porţiunii de suprafaţă Σ este

$$A = \int\int_{\Sigma} d\sigma = \int\int_{D} \sqrt{EG - F^2} dx dy$$

b) Masa M şi coordonatele centrului de greutate G al porţiunii Σ de suprafaţă pe care este distribuită densitatea de masă $\rho(x, y, z)$ sunt date de

$$M = \int\int_{\Sigma} \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int\int_{\Sigma} x\rho(x, y, z) d\sigma$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int\int_{\Sigma} y\rho(x, y, z) d\sigma$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int\int_{\Sigma} z\rho(x, y, z) d\sigma$$

c) Momentul de inerţie al porţiunii Σ de suprafaţă , în raport cu originea, se calculează cu formula

$$I_0 = \int\int_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma$$

12.2 Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de prima speţă :

1. $I = \int\int_{\Sigma} (x + y + z) d\sigma$, unde Σ este suprafaţa $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$

Soluţie. Pentru suprafaţa Σ considerăm reprezentarea $x = a\sin\theta\cos\varphi$, $y = a\sin\theta\sin\varphi, z = a\cos\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]$

Calculăm coeficienţii primei forme fundamentale:

$E = a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + a^2\sin^2\theta = a^2$

$F = a\cos\theta\cos\varphi\cdot a\sin\theta(-\sin\varphi) + a\cos\theta\sin\varphi\cdot a\sin\theta\cos\varphi + a(-\sin\theta)\cdot$
$\cdot 0 = -a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0$

$G = a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 0 = a^2\sin^2\theta$

Găsim $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dxdy = a^2\sin\theta d\theta d\varphi$

Atunci

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(a\sin\theta\cos\varphi + a\sin\theta\sin\varphi + a\cos\theta)a^2\sin\theta d\varphi d\theta =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}[a^3\sin^2\theta(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{a^3}{2}\sin 2\theta]d\varphi d\theta =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}[a^3\sin^2\theta(\sin\varphi/_0^{2\pi} - \cos\varphi/_0^{2\pi}) + \frac{a^3}{2}\sin 2\theta\cdot\varphi/_0^{2\pi}]d\theta =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi a^3\sin 2\theta d\theta = \pi a^3\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)/_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi a^3}{2}(\cos\pi - \cos 0) = \pi a^3$ □

2. $I = \int\int_\Sigma \frac{1}{x+y+z}d\sigma$, unde Σ este porţiunea din planul $x + y + z = a$ decupată de planele de coordonate

Soluţie. Suprafaţa Σ este triunghiul ABC cu $A(a, 0, 0), B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ şi se proiectează în planul $z = 0$ după triunghiul OAB. Deci ecuaţia suprafeţei Σ poate fi scrisă sub forma explicită $z = a - x-$ $-y, (x, y) \in \triangle OAB$ din planul xOy. Avem $p = -1, q = -1, d\sigma =$ $= \sqrt{3}dxdy$. Atunci

$I = \int\int_{\triangle OAB}\frac{1}{a}\sqrt{3}dxdy = \frac{\sqrt{3}}{a}\int_0^a\int_0^{a-x}dydx = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ □

3. $I = \int\int_\Sigma zd\sigma$, unde Σ este porţiunea din paraboloidul $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 = 8$

Soluţie. Suprafaţa Σ se proiectează în planul xOy după domeniul plan $D : x^2 + y^2 \leq 8$. Deci $\Sigma : z = \frac{x^2+y^2}{2}, (x, y) \in D$. Avem $p = x, q =$ $y, d\sigma =$
$= (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy$. Atunci

$I = \int\int_D\frac{1}{2}(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^3(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}d\rho d\theta =$
$= \pi\left[\frac{1}{5}(1+\rho^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]/_0^{2\sqrt{2}} = \frac{596}{15}\pi$ □

4. $I = \int\int_\Sigma(xy + yz + zx)d\sigma$, unde Σ este porţiunea din suprafaţa conică $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - 2ax = 0, a > 0$

Soluţie. Avem $p = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, d\sigma = \sqrt{2}dxdy$.Atunci
$I = \int\int_{x^2+y^2-2ax\leq 0} \sqrt{2}[xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{2}[\rho^2 \sin\theta\cos\theta + \rho^2(\cos\theta + \sin\theta)]\rho d\rho d\theta =$
$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}[\sin\theta\cos\theta \frac{\rho^4}{4}/_0^{2a\cos\theta} + (\cos\theta + \sin\theta)\frac{\rho^4}{4}/_0^{2a\cos\theta}]d\theta =$
$= 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos^5\theta + \cos^5\theta + \sin\theta\cos^4\theta)d\theta$ etc. □

5. $I = \int\int_\Sigma xyzd\sigma$,$\Sigma$ este suprafaţa paraboloidului $x^2 + y^2 = z$ situată între planele $z = 0, z = 1$ cu $x, y \geq 0$

Soluţie. Avem $p = 2x, q = 2y, d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$.Atunci
$I = \int\int_D xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy$, unde $D : x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$

Rezolvăm integrala trecând la coordonate polare:
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^5\sqrt{1 + 4\rho^2}\cos\theta\sin\theta d\rho d\theta =$
$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 \rho^5\sqrt{1 + 4\rho^2}d\rho =$
$= \left(-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right)/_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\sqrt{1 + 4t}dt$ (am făcut schimbarea de variabilă $\rho^2 = t$)
$I = \frac{1}{4}\int_0^1 t^2\sqrt{1 + 4t}dt = \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{y^2-1}{4}\right)^2 \cdot y \cdot \frac{1}{2}ydy =$
$= \frac{1}{128}\int_1^{\sqrt{5}} y^2(y^4 - 2y^2 + 1)dy = \frac{1}{128}\left(\frac{y^7}{7}/_1^{\sqrt{5}} - 2\frac{y^5}{5}/_1^{\sqrt{5}} + \frac{y^3}{3}/_1^{\sqrt{5}}\right) =$
$= \frac{1}{128}\left(\frac{125\sqrt{5}}{7} - \frac{1}{7} - 10\sqrt{5} + \frac{2}{5} + \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{128}\left(\frac{200\sqrt{5}}{21} - \frac{8}{105}\right)$ (am făcut schimbarea $\sqrt{1 + 4t} = y \Longrightarrow t = \frac{y^2-1}{4} \Longrightarrow dt = \frac{1}{2}ydy$) □

6. Să se calculeze integrala de suprafaţă de prima speţă

$$\int_\Sigma F(x,y,z)d\sigma$$

în următoarele cazuri:
a. $F(x,y,z) = |xyz|$, $\Sigma : z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0,1]$.
b. $F(x,y,z) = y\sqrt{z}$, $\Sigma : x^2 + y^2 = 6z$, $z \in [0,2]$.
c. $F(x,y,z) = z^2$, $\Sigma = \{(x,y,z)\,;\, z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 - 6y \leq 0.\}$.

Soluţie. **a.** Parametrizarea carteziană a conului este:

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ D = \{(x,y)\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Rezultă :

$$\int_{\Sigma} |xyz| d\sigma = \int\int_D |xy|\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\int\int_D |xy|\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

b. Parametrizarea carteziană a paraboloidului este:

$$z = f(x,y) = \frac{1}{6}(x^2+y^2),\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 12\}.$$

Rezultă :

$$\int_{\Sigma} y\sqrt{z}d\sigma = \int\int_D y\sqrt{\frac{1}{6}(x^2+y^2)}\sqrt{1+\frac{1}{9}(x^2+y^2)}\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{12}} \rho^3\sqrt{1+\frac{\rho^2}{9}}\ \sin\varphi = 0.$$

c. Cu parametrizarea carteziană

$$z = \sqrt{x^2+y^2},\ (x,y) \in D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 6y\}.$$

rezultă :

$$\int_{\Sigma} z^2 d\sigma = \int\int_D (x^2+y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{6\sin\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{243}{2}\pi.$$

□

7. Să se calculeze aria porţiunii din sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, decupată de cilindrul $x^2+y^2-ay=0$ situată în semispaţiul $z \geq 0$.

Soluţie. Proiecţia suprafeţei în planul xOy se face pe domeniul (D) : $x^2+y^2-ay \leq 0, z=0$. Deoarece $(\Sigma)z = (a^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}, (x,y) \in$ $\in D$,rezultă $p = -x(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}, q = -y(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ şi $d\sigma = a(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}dxdy$.

Atunci aria este

$A = \int\int_D a(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}dxdy = a\int_0^{\pi}\int_0^{a\sin\theta}\rho(a^2-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}d\rho d\theta =$
$= a^2\int_0^{\pi}(1-|\cos\theta|)d\theta = (\pi-2)a^2$ □

8. Să se calculeze aria suprafeţei $x^2+y^2+z^2=a^2, z>0$ pentru care $x+y \leq a, x, y \geq 0$.

Soluţie. Avem $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, p=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, q=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,
$d\sigma=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

Atunci aria este

$A=\int\int_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$, unde $D: x+y\le a, x\ge 0, y\ge 0$

$A=a\int_0^a\int_0^{a-x}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dydx=a\int_0^a \arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}/_0^{a-x}dx=$
$=a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$

Facem substituţia $t=\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ şi obţinem

$A=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin t\cos t}{(1+\sin^2 t)^2}dt$

Folosim metoda de integrare prin părţi şi obţinem

$A=2a^2\left(-\frac{t}{1+\sin^2 t}\right)/_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\sin^2 t}=-\frac{a^2\pi}{2}+2a^2I_1$,unde

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\sin^2 t}$

Pentru calculul lui I_1 facem substituţia $u=\operatorname{tg} t$ şi avem

$I_1=\int_0^{\infty}\frac{du}{2u^2+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}u/_0^{\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Aşadar, $A=\frac{\pi a^2}{2}(\sqrt{2}-1)$ □

9. Să se calculeze aria porţiunii de pe suprafaţa $z=x^2$ decupată de planele $x+y=\sqrt{2}, x=0, y=0$.

Soluţie. Fie Σ partea de pe suprafaţa cilindrului $z=x^2$ decupată de planele $x+y=\sqrt{2}, x=0, y=0$

Avem $p=2x, q=0, d\sigma=\sqrt{1+4x^2}dxdy$

Atunci aria este

$A=\int\int_D\sqrt{1+4x^2}dxdy$, unde $D: x+y\le\sqrt{2}, x\ge 0, y\ge 0$

$A=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}-x}\sqrt{1+4x^2}dydx$ etc □

10. Să se calculeze aria porţiunii din suprafaţa $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2$ interioară conului $x^2+y^2=z^2, z>0$.

Soluţie. O reprezentare parametrică a lui Σ este
$x=a\sin\theta\cos\varphi, y=a\sin\theta\sin\varphi, z=a\cos\theta, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right], \varphi\in[0,2\pi)$

Prin calcul rezultă $E=a^2, F=0, G=a^2\sin^2\theta$

Obţinem $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\sqrt{EG-F^2}d\varphi d\theta=a^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=$
$=a^2(2-\sqrt{2})$ □

11. Să se calculeze aria suprafeţei Σ dată de
$\Sigma = \{(x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2), x, y, z \geq 0\}$

Soluţie. In coordonate sferice,ecuaţia suprafeţei devine $\rho = a \sin \theta$

Ecuaţiile parametrice ale pânzei Σ vor fi
$x = a \sin^2 \theta \cos \varphi, y = a \sin^2 \theta \sin \varphi, z = a \sin \theta \cos \theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Calculăm $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin^2 \theta$

Aia este $A = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{a^2\pi}{8}$ □

12. Să se calculeze aria suprafeţei Σ dată de
$\Sigma = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 = 2az, (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2), x \geq 0, a > 0\}$

Soluţie. Vrem să calculăm aria decupată de cilindrul $(x^2 + y^2)^2 \leq$
$\leq a^2(x^2 - y^2)$ în paraboloidul $x^2 + y^2 = 2az$.

Avem $\Sigma : z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2), p = \frac{x}{a}, q = \frac{y}{a}, d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} dxdy$

Atunci $A = \int \int_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}} dxdy$,unde $D : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2)$

Scriem în coordonate polare ecuaţia lemniscatei şi obţinem $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$,
$\rho \in [0, a\sqrt{\cos 2\theta}]$

Atunci $A = \frac{2}{a} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho\sqrt{a^2 + \rho^2} d\rho d\theta = \frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$ □

13. Să se calculeze aria suprafeţei Σ dată de
$\Sigma = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 = (1 - z)^2, x^2 + y^2 + 2y \geq 1, z \in [0, 1]\}$

Soluţie. Vrem să calculăm aria porţiunii din conul $x^2 + y^2 = (1 - z)^2$ pentru $z \in [0, 1]$, decupată de cilindrul $x^2 + (y + 1)^2 = 2$ în exterior.

Avem $\Sigma : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, p = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, q = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, d\sigma = \sqrt{2} dxdy$

Atunci $A = \int \int_D \sqrt{2} dxdy$, unde $D : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y + 1)^2 \geq 2$

Trecem la coordonate polare $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ şi obţinem
$2 \leq \rho^2 \cos^2 \theta + (\rho \sin \theta + 1)^2$ şi $\rho^2 \leq 1 \Longrightarrow \rho \in [-\sin \theta + \sqrt{1 + \sin^2 \theta}, 1]$.
Cum $1 \geq -\sin \theta + \sqrt{1 + \sin^2 \theta} \Longrightarrow 2 \sin \theta \geq 0 \Longrightarrow \theta \in [0, \pi]$

Aşadar, $A = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \int_{-\sin \theta + \sqrt{1+\sin^2 \theta}}^{1} \rho d\rho d\theta = \sqrt{2}$ □

14. Să se calculeze aria suprafeţei Σ dată de
$\Sigma = \{(x, y, z)/az = xy, a > 0, x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq 0\}$

Soluţie. Vrem să calculăm aria porţiunii $z = \frac{1}{a}xy$ paraboloidului hiperbolic, cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 \le a^2$.

Atunci $A = \int\int_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$, unde $D : x^2 + y^2 \le a^2$

Trecând la coordonate polare obţinem

$A = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{a^2 + \rho^2}\rho d\rho d\theta = \frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ □

15. Să se calculeze aria suprafeţei Σ dată de
$\Sigma = \{(x, y, z)/x^2 + z^2 = 1, y + z \le 1, x, y, z \ge 0\}$

Soluţie. Vrem să calculăm aria cilindrului $x^2 + z^2 \le 1$ pentru $x \ge 0$ decupată de prisma $y + z \le 1, y, z \ge 0$

Pânza are ecuaţia $x = \sqrt{1 - z^2}, (y, z) \in D$, unde $D : y + z \le 1, y, z \ge 0$

Avem $p = 0, q = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, d\sigma = \sqrt{1 + \frac{z^2}{1-z^2}}dxdy$

Atunci $A = \int\int_D \sqrt{1 + \frac{z^2}{1-z^2}}dxdy = \int_0^1\int_0^{1-y} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dzdy = \frac{\pi}{2} - 1$ □

16. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al porţiunii de suprafaţă omogenă $(\Sigma) z = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, decupată de suprafaţa $x^2+y^2 = = ax$.

Soluţie. Trebuie să calculăm coordonatele centrului de greutate al unei porţiuni din suprafaţa unui con, decupată de un cilindru, densitatea fiind constantă (o luăm egală cu unitatea).

Suprafaţa se proiectează în planul xOy după domeniul
$(D) : x^2 + y^2 \le ax, z = 0.$

Avem $p = x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, q = y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}, d\sigma = \sqrt{2}dxdy$

Atunci $M = \int\int_\Sigma d\sigma = \sqrt{2}\int\int_D dxdy = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} \rho d\rho d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^2$

$x_G = \frac{1}{M}\int\int_\Sigma x d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{M}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} \rho^2\cos\theta d\rho d\theta = \frac{a}{2}$

Analog,$y_G = 0, z_G = \frac{16}{9}a$ □

17. Să se calculeze momentul de inerţie, în raport cu axa Oz,al porţiunii sferice $x^2+y^2+z^2 = a^2, x, y, z \ge 0$, de densitate de masă $\rho(x, y, z) = z$.

Soluţie. Momentul de inerţie în raport cu axa Oz este

$I_{Oz} = \int\int_\Sigma(x^2 + y^2)\rho(x, y, z)d\sigma = \int\int_\Sigma(x^2 + y^2)zd\sigma$

Pentru suprafaţa Σ avem reprezentarea:
$x = a\sin\theta\cos\varphi, y = \sin\theta\sin\varphi, z = a\cos\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Deoarece $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}d\theta d\varphi = a^2\sin\theta d\theta d\varphi$,rezultă

$I_{Oz} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2\theta \cdot a\cos\theta \cdot a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{\pi}{2} a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos\theta d\theta =$
$= \frac{a^5\pi}{8}$ □

Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa a doua:

18. $I = \int\int_\Sigma xdydz + ydxdz + zdxdy$, unde Σ este faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Soluţie. Fie $\Phi = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$. Versorul normalei ataşat feţei exterioare a sferei este $\overline{n} = \frac{\text{grad}\Phi}{\|\text{grad}\Phi\|} = \frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$

Atunci $I = \int\int_\Sigma \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a}\right) d\sigma = \int\int_\Sigma \frac{a^2}{a} d\sigma = a\int\int_\Sigma d\sigma = 4\pi a^3$

□

19. $I = \int\int_\Sigma \left(\frac{1}{x}dydz + \frac{1}{y}dzdx + \frac{1}{z}dxdy\right)$, unde Σ este faţa interioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Soluţie. Fie $\Phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$.Versorul normalei interioare corespunzătoare feţei interioare elipsoidului este
$\overline{n} = -\frac{\text{grad}\Phi}{\|\text{grad}\Phi\|} = \frac{1}{A}\left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2}\right)$,unde
$A = \|\text{grad}\Phi\| = 2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}$
Deci, $I = \int\int_\Sigma \left(-\frac{2}{a^2A} - \frac{2}{b^2A} - \frac{2}{c^2A}\right) d\sigma = -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\int\int_\Sigma \frac{2}{A} d\sigma =$
$= -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\int\int_\Sigma \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}} d\sigma$
Luăm pentru elipsoid reprezentarea $x = a\sin\theta\cos\varphi, y = b\sin\theta\sin\varphi$, $z = c\cos\theta, \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0, 2\pi]$
Obţinem
$EG - F^2 = [\cos^2\theta(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) + c^2\sin^2\theta] \cdot \sin^2\theta(a^2\sin^2\varphi +$
$+ b^2\cos^2\varphi) - (-a^2\cos\theta cos\varphi\sin\theta\sin\varphi + b^2\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi) =$
$= a^2b^2\cos^2\theta\sin^4\varphi\sin^2\theta + a^2c^2\sin^4\theta\sin^2\varphi + a^2b^2\cos^2\theta\cos^4\varphi\sin^2\theta +$
$+ b^2c^2\sin^4\theta\cos^2\varphi + 2a^2b^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi\sin^2\theta =$
$= a^2b^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\sin^2\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + a^2b^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\theta \cdot$
$\cdot(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + a^2c^2\sin^4\theta\sin^2\varphi + b^2c^2\sin^4\theta\cos^2\varphi = a^2b^2\cos^2\theta\sin^2\theta \cdot$
$\cdot(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + a^2c^2\sin^4\theta\sin^2\varphi + b^2c^2\sin^4\theta\cos^2\varphi =$
$= a^2b^2c^2\sin^2\theta\left(\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}\right) =$
$= a^2b^2c^2\sin^2\theta\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow d\sigma = abc|\sin\theta|\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta d\varphi \Longrightarrow$
$\Longrightarrow I = -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} abc|\sin\theta| d\theta d\varphi =$
$= -4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ □

20. $I = \int\int_{\Sigma}(y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy$, unde Σ este faţa exterioară închisă a conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le h$

Soluţie. Suprafaţa Σ se compune din suprafeţele Σ_1- faţa laterală a conului şi Σ_2- secţiunea conului cu planul $z = h$. Deci
$I = \int\int_{\Sigma_1} + \int\int_{\Sigma_2} = I_1 + I_2$
Deoarece faţa exterioară a lui Σ_2 are versorul normal $\overline{n_2}(0, 0, 1)$ obţinem
$I_2 = \int\int_{\Sigma_2}(x - y)d\sigma = \int\int_D (x - y)dxdy$, unde $D : x^2 + y^2 \le h^2, z = 0$ este proiecţia lui Σ_2 în planul xOy. Trecând la coordonate polare rezultă $I_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^h \rho^2(\cos\theta - \sin\theta)d\rho d\theta = 0$
Fie $\Phi = z - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ ecuaţia suprafeţei Σ_1. Un vector normal la suprafaţa Σ_1 este vectorul $\text{grad}\Phi = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$ şi $\|\text{grad}\Phi\| = \sqrt{2}$
Deoarece versorul $\overline{n_1}$ formează unghi obtuz cu Oz, rezultă $\cos\gamma < 0$, deci $\overline{n_1} = -\frac{\text{grad}\Phi}{\|\text{grad}\Phi\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$
Atunci
$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\int_{\Sigma_1}\left[\frac{x(y-z)+y(z-x)}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x - y)\right]d\sigma = \sqrt{2}\int\int_{\Sigma_1}(y - x)d\sigma =$
$= 2\int\int_D (y - x)dxdy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^h \rho^2(\sin\theta - \cos\theta)d\rho d\theta = 0$
Deci $I = 0$ □

21. $I = \int\int_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy$, unde Σ este faţa exterioară a suprafeţei piramidei mărginită de planele $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a, a > 0$

Soluţie. Avem $I = \int\int_{AOB} + \int\int_{BOC} + \int\int_{COA} + \int\int_{ABC}$, unde
$AOB : z = 0, x + y \le a, x \ge 0, y \ge 0$ cosinuşii directori ai normalei fiind $(0, 0, -1)$;
$BOC : x = 0, y + z \le a, y \ge 0, z \ge 0$ cosinuşii directori ai normalei fiind $(-1, 0, 0)$;
$COA : y = o, x + z \le a, x \ge 0, z \ge 0$ cosinuşii directori ai normalei fiind $(0, -1, 0)$;
$ABC : z = a - x - y, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ cosinuşii directori ai normalei fiind $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
Aşadar,
$I = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\int\int_{ABC}(xy + yz + zx)d\sigma =$
$= \int\int_D [(x + y)(a - x - y) + xy]dxdy$, unde $D : x + y \le a, x \ge 0, y \ge 0$
Deci
$I = \int_0^a\int_0^{a-x}(ax + ay - x^2 - y^2 - xy)dydx =$

$= \int_0^a \left(axy/_0^a + \frac{ay^2}{2}/_0^a - x^2y/_0^a - \frac{y^3}{3}/_0^a - x\frac{y^2}{2}/_0^a\right) dx =$
$= \int_0^a \left(a^2x + \frac{a^3}{2} - x^2a - \frac{a^3}{3} - x\frac{a^2}{2}\right) dx$ etc. □

22. $I = \int\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} dxdy$, unde Σ este faţa exterioară a paraboloidului $4x^2 + y^2 = z, 0 \le z \le 1$

Soluţie. Pe faţa exterioară a lui Σ,normala la Σ face cu Oz un unghi obtuz, deci versorul ei este $\overline{n} = -\frac{\text{grad}\Phi}{\|\text{grad}\Phi\|}$, unde $\Phi = z - 4x^2 - y^2$.Deci
$\overline{n} = -\frac{1}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}}(-8x, -2y, 1)$
Atunci
$I = \int\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}}\right) d\sigma =$
$= \int\int_D \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{64x^2+4y^2+1}}\right) \cdot \sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1} dxdy$, deoarece
$p = 8x, q = 2y, d\sigma = \sqrt{64x^2 + 4y^2 + 1} dxdy$
Trecând la coordonate polare $x = \frac{\rho}{2}\cos\theta, y\rho\sin\theta, \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)$, obţinem:
$I = -\int\int_D \frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} dxdy = -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} d\theta d\rho =$
$= -\pi\int_0^1 \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} d\rho = -\pi \cdot \sqrt{\rho^2 + 1}/_0^1 = -\sqrt{2}\pi + \pi$ □

23. Să se calculeze fluxul câmpului de vectori $\overline{V}$ prin suprafaţa Σ în următoarele cazuri:
a. $\overline{V} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, $\Sigma : z^2 = x^2 + y^2, z \in [0, 1]$.
b. $\overline{V} = y\overline{i} - x\overline{j} + z^2\overline{k}$, $\Sigma : z = x^2 + y^2$, $z \in [0, 1]$.
c. $\overline{V} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\overline{i} - x\overline{j} + \overline{k}\right)$, $\Sigma : z = 4 - x^2 - y^2$, $z \in [0, 1]$.

Soluţie. Fluxul câmpului de vectori $\overline{V}$ prin suprafaţa Σ în raport cu normala $\overline{n}$ este, prin definiţie, $\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int_\Sigma \overline{V}\overline{n}d\sigma$, $\overline{n}$ fiind versorul normalei la suprafaţa Σ.
Dacă $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$ este o parametrizare a lui Σ, atunci fluxul este:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int_\Sigma \overline{V}\overline{n}d\sigma = \int\int_D (\overline{V} \circ \Phi)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) dudv =$$
$$= \int\int_D \left(\overline{V} \circ \Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) dudv,$$

ultima paranteză fiind produsul mixt al vectorilor $\overline{V} \circ \Phi$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ şi $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$.
a. Considerând parametrizarea carteziană $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, obţinem

$$\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}\left(-x\overline{i} - y\overline{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\overline{k}\right)$$

şi deci fluxul este 0 deoarece vectorii $\overline{V}$ şi $\overline{n}$ sunt ortogonali.
b. Considerând parametrizarea carteziană

$$z = x^2 + y^2,\ D = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \le 1\},$$

obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int\int_D (x^2 + y^2)^2 dxdy = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^5 d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

c. Cu parametrizarea carteziană

$$z = 4 - x^2 - y^2,\ D = \{(x, y)\,;\, 3 \le x^2 + y^2 \le 4\},$$

obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{V}) = \int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy = \int_{\sqrt{3}}^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi(2 - \sqrt{3}).$$

□

12.3 Probleme propuse

Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de prima speţă :

1. $I = \int\int_\Sigma xyd\sigma$, unde $\Sigma : y^2 + z^2 = R^2, 0 \le x \le a, y \ge 0, z \ge 0$

   R: $I = \frac{a^2R^2}{2}$

2. $I = \int\int_\Sigma \frac{1}{(x^2+y^2)^q} d\sigma$, unde $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x, y, z \ge 0$

   R: $I = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2} R^{2(1-q)} \frac{\Gamma(1-q)}{(1-2q)\Gamma\left(\frac{1}{2}-q\right)}$

3. $I = \int\int_\Sigma \left(2x + \frac{4}{3}y + z\right) d\sigma$, unde $\Sigma : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x, y, z \ge 0$

   R: $I = 4\sqrt{61}$

4. $I = \int\int_\Sigma xyd\sigma$, unde Σ este porţiunea din planul $(P) : 2x + y + 2z = 1$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$

   R: $I = \frac{3}{2}\pi$

5. Să se calculeze aria porţiunii din paraboloidul $x^2 + y^2 = 2z$, mărginită de planul $z = 2$.

   R: $A = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$

6. Să se afle aria pânzei (Σ), definită prin
   $\Sigma = \left\{(x, y, z)/x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \le y \le x\sqrt{3}, x, z \ge 0\right\}$

   R: $A = \frac{\pi a^2}{12}$

7. Să se calculeze aria suprafeţei
$\Sigma = \{(x, y, z)/x + y + z = 2, x^2 \leq y \leq x, x, z \geq 0\}$

   R: $A = \frac{\sqrt{3}}{6}$

8. Să se calculeze aria suprafeţei
$\Sigma = \{(x, y, z)/(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x, y, z \geq 0\}$

   R: $A = \frac{\pi^2 a^2}{16}$

9. Să se găsească centrul de greutate al unei calote sferice omogene de rază R şi înălţime $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R$.

   R: $x_G = y_G = 0, z_G = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

10. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeţei omogene $\Sigma : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 2 - z, z \geq 0$.

    R: $x_G = y_G = 0, z_G = \frac{2\pi\sqrt{125}}{3}$

    Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa doua:

11. $I = \int\int_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, unde Σ este faţa interioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

    R: $I = -\pi a^4$

12. $I = \int\int_{\Sigma} zdxdy$, unde Σ este faţa exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

    R: $I = \frac{4}{3}\pi abc$

13. $I = \int\int_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, unde Σ este faţa exterioară închisă a cilindrului $x^2 + y^2 = a^2, -h \leq z \leq h$

    R: $I = 3\pi a^2 h$

Capitolul 13

Formule integrale

13.1 Noţiuni teoretice

I) Divergenţa şi rotorul unui câmp vectorial

Definiţia 13.1. Dacă se fixează un reper ortogonal plan xOy de versori $\overline{i}, \overline{j}$ şi dacă $\overline{v}(x,y) = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ este un câmp vectorial de clasă $C^1(U)$, unde $U \subset \mathbb{R}^2$ este un deschis, atunci se pot defini, pentru orice punct $a \in U$:

$\mathrm{div}_a\overline{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a)$ **divergenţa lui $\overline{v}$ în punctul a**

$\mathrm{rot}_a\overline{v} = \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a)\right](\overline{i} \times \overline{j})$ **rotorul lui $\overline{v}$ în punctul a**

precum şi forma diferenţială de gradul I în U, $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Definiţia 13.2. Câmpul $\overline{v}$ se numeşte **câmp de gradienţi în U** dacă există un câmp scalar $\varphi \in C^1(U)$ numit **potenţial scalar al lui $\overline{v}$** astfel încât $\overline{v} = \mathrm{grad}\varphi$, adică $P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ în fiecare punct din U.

Dacă , în plus, $\varphi \in C^2(U)$, atunci

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right](\overline{i} \times \overline{j}) = 0$ şi

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\triangle\varphi$ (**laplacianul lui φ**)

Câmpurile de gradienţi se mai numesc **câmpuri derivând dintr-un potenţial.**

Exemplul 13.1. Orice câmp constant $\overline{v}(x,y) = \overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j}$ este un câmp de gradienţi, deoarece luând $\varphi(x,y) = a_1x + a_2y$ avem $\overline{v} = \mathrm{grad}\varphi$

Exemplul 13.2. Pentru câmpul plan newtonian $\overline{v} = -k\frac{\overline{r}}{r^3}$ (unde $\overline{r} =$ $= x\overline{i} + y\overline{j}, r = \sqrt{x^2+y^2}, k > 0$ constant) definit în $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ avem $\mathrm{div}\overline{v} = \frac{k}{r^3}, \mathrm{rot}\overline{v} = 0$ şi $\overline{v} = \mathrm{grad}\left(\frac{k}{r}\right)$ în fiecare punct din U.

Reluăm cele de mai sus pentru cazul spaţiului $\mathbb{R}^3$, raportat la un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Definiţia 13.3. Fie $\overline{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ un câmp de clasă $C^1(U), U \subset \mathbb{R}^3$ *fiind un deschis fixat. Pentru orice punct* $a \in U$ se definesc scalarul

$$\mathrm{div}_a\overline{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a) + \frac{\partial R}{\partial z}(a)$$

numit **divergenţa lui $\overline{v}$ în a** şi vectorul

$$\text{rot}_a\overline{v} = \left[\frac{\partial R}{\partial y}(a) - \frac{\partial Q}{\partial z}(a)\right]\overline{i} + \left[\frac{\partial P}{\partial z}(a) - \frac{\partial R}{\partial x}(a)\right]\overline{j} + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(a) - \frac{\partial P}{\partial y}(a)\right]\overline{k}$$

numit **rotorul lui $\overline{v}$ în a** care poate fi scris sugestiv astfel $\text{rot}_a\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

("dezvoltând" acest determinant simbolic după linia întâi).

Semnificaţia concretă a rotorului

Considerând vectorul $\overline{v}$ care reprezintă vectorul viteză a unui punct oarecare într-o rotaţie de viteză unghiulară $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, în jurul unei axe $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ rotorul acestui vector are componentele $2p, 2q, 2r$; el este aşadar dublul vectorului viteză de rotaţie. Intr-un mod mai general, să considerăm vectorul viteză $\overline{v}$ într-un punct (x, y, z) oarecare al unui fluid şi o sferă foarte mică cu centrul (x, y, z). Dacă am solidifica porţiunea de fluid care umple sfera, suprimând în acelaşi timp fluidul care înconjoară sfera în aşa fel încât sfera să fie lăsată numai sub influenţa vitezelor câştigate, în mecanica fluidelor se arată că mişcarea pe care o va lua sfera se va compune dintr-o translaţie definită de viteza $\overline{v}$ a punctului (x, y, z) şi o rotaţie egală cu $\frac{1}{2}\text{rot}\overline{v}$.

Proprietăţi de calcul ale divergenţei şi rotorului

1) Fie $\overline{v}$ şi $\overline{w}$ două câmpuri vectoriale de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Atunci pentru orice punct $a \in U$,

$$\text{div}_a(\overline{v} + \overline{w}) = \text{div}_a(\overline{v}) + \text{div}_a(\overline{w})$$

$$\text{rot}_a(\overline{v} + \overline{w}) = \text{rot}_a(\overline{v}) + \text{rot}_a(\overline{w})$$

iar dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ este constantă , atunci

$$\text{div}_a(\lambda\overline{v}) = \lambda\text{div}_a(\overline{v})$$

$$\text{rot}_a(\lambda\overline{v}) = \lambda\text{rot}_a(\overline{v})$$

2) Dacă $\overline{c}$ este un vector constant, atunci $\text{div}_a(\overline{c}) = 0$, $\text{rot}_a(\overline{c}) = 0$, în fiecare punct din $\mathbb{R}^3$. Dacă se notează $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ (vectorul de poziţie), atunci $\text{div}\overline{r} = 3, \text{rot}\overline{r} = 0, \text{div}(\overline{c} \times \overline{r}) = 0, \text{rot}(\overline{c} \times \overline{r}) = 2\overline{c}$.

3) Fie φ un câmp scalar şi $\overline{v}$ un câmp vectorial, ambele de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$. Atunci pentru orice $a \in U$ au loc relaţiile

$$\text{div}_a(\varphi\overline{v}) = \varphi(a)\text{div}_a(\overline{v}) + \overline{v}(a) \cdot \text{grad}_a\varphi$$

$$\text{rot}_a(\varphi\overline{v}) = \varphi(a)\text{rot}_a\overline{v} - \overline{v}(a) \times \text{grad}_a\varphi$$

Exemplul 13.3. Fie câmpul vectorial $\overline{v} = x^2y\overline{i} + yz\overline{j} - 2xyz\overline{k}$ de clasă C^∞ în $\mathbb{R}^3$. Atunci

$$\text{div}\overline{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz) = z$$

$$\text{rot} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & yz & -2xyz \end{vmatrix} = -(2xz+y)\bar{i} + 2yz\bar{j} - x^2\bar{k}$$

Exemplul 13.4. Pentru câmpul newtonian $\bar{v} = -k\frac{\bar{r}}{r^3}$ ($k > 0$ constant) avem $\bar{v} = \varphi\bar{r}$, unde $\varphi = -\frac{k}{r^3}$, deci $\text{div}\bar{v} = \text{div}(\varphi\bar{r}) = \varphi\text{div}\bar{r} + \bar{r}\cdot\text{grad}\varphi$ şi cum $\text{grad}\varphi = -k\text{grad}(r^{-3}) = 3kr^{-4}\frac{\bar{r}}{r} = \frac{3k}{r^5}\bar{r}$,rezultă $\text{div}\bar{v} = 3\left(-\frac{k}{r^3}\right) + \frac{3k}{r^5}(\bar{r}\cdot\bar{r}) = 0$ (deoarece $\bar{r}\cdot\bar{r} = r^2$)

$\text{rot}\bar{v} = \text{rot}(\varphi\bar{r}) = \varphi\text{rot}\bar{r} - \bar{r}\times\text{grad}\varphi = -\bar{r}\times\text{grad}\varphi = -\bar{r}\times\left(\frac{3k}{r^5}\bar{r}\right) =$
$= -\frac{3k}{r^5}(\bar{r}\times\bar{r}) = 0$

Exemplul 13.5. Câmpul vectorial $\bar{v} = -y\bar{i} + x\bar{j}$ este un "câmp de vârtejuri" deoarece el este de forma $\bar{v} = \text{rot}\bar{w}$ (de exemplu luând $\bar{w} = xz\bar{i} + yz\bar{j}$). Terminologia este motivată de faptul că în fiecare punct $a = (x_0, y_0)$ vectorul $\bar{v}(x_0, y_0) = -y_0\bar{i} + x_0\bar{j}$ cu punctul de aplicaţie în a, este tangent la cercul cu centrul în origine trecând prin punctul a.

Gradientul, divergenţa, rotorul se mai numesc **operatorii diferenţiali de ordinul I în teoria câmpurilor**.

Există o posibilitate de unificare a proprietăţilor de calcul ale gradientului, divergenţei şi rotorului, pentru câmpuri de clasă C^1, cu ajutorul unui operator simbolic $\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$ numit **operatorul nabla**(sau **"vectorul nabla"**, având drept componente operatorii de derivare parţială). Vom considera convenţiile $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi$ ca produs între câmpul scalar φ şi "vectorul" ∇,$\text{div}\bar{v} = \nabla\cdot\bar{v}$ ca produs scalar între "vectorul" ∇ şi vectorul $\bar{v}$ şi $\text{rot}\bar{v} = \nabla\times\bar{v}$ ca produs vectorial între "vectorul" ∇ şi vectorul $\bar{v}$. De fapt, convenind să definim "produsul" lui $\frac{\partial}{\partial x}$(respectiv $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$) cu un câmp scalar φ ca fiind $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ (respectiv $\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$), rezultă

$$\nabla\varphi = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \bar{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \text{grad}\varphi$$

şi dacă $\bar{v} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$, atunci

$$\nabla\cdot\bar{v} = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}) = \text{div}\bar{v}$$

$$\nabla\times\bar{v} = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot}\bar{v}$$

Reguli de calcul:

$\nabla c = 0$ (dacă c este o constantă scalară)

$\nabla\cdot\bar{c} = 0, \nabla\times\bar{c} = 0$ (dacă $\bar{c}$ este un vector constant)

$\nabla\cdot(\varphi\bar{v}) = \bar{v}\cdot(\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\cdot\bar{v}) = \bar{v}\cdot\text{grad}\varphi + \varphi\text{div}\bar{v}$

$\nabla\times(\varphi\bar{v}) = -\bar{v}\times(\nabla\varphi) + \varphi(\nabla\times\bar{v}) = -\bar{v}\times\text{grad}\varphi + \varphi\text{rot}\bar{v}$

$\nabla\cdot(\overline{v}\times\overline{w})=\overline{w}\cdot(\nabla\times\overline{v})-\overline{v}(\nabla\times\overline{w})$,adică $\mathrm{div}(\overline{v}\times\overline{w})=\overline{w}\cdot\mathrm{rot}\overline{v}-\overline{v}\cdot\mathrm{rot}\overline{w}$;în particular,$\nabla\cdot(\overline{c}\times\overline{r})=\overline{r}\cdot\mathrm{rot}\overline{c}-\overline{c}\cdot\mathrm{rot}\overline{r}=0$ dacă $\overline{c}$ este vector constant, iar $\overline{r}$ este vectorul de poziţie.

Exemplul 13.6. Calculăm cu ajutorul lui ∇ divergenţa şi rotorul câmpului vectorial $\overline{v}=\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}\overline{r}$ de clasă $\mathcal{C}^\infty$ în $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, unde $\overline{c}$ este un vector constant, iar $\overline{r}$ vectorul de poziţie. Avem

$\mathrm{div}\overline{v}=\nabla\cdot\overline{v}=\overline{r}\cdot\left(\nabla\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}\right)+\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}(\nabla\cdot\overline{r})=\overline{r}\cdot\mathrm{grad}\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}+3\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}=\overline{r}\cdot\frac{\overline{c}\cdot r^4-(\overline{c}\cdot\overline{r})\cdot 4r^3\frac{\overline{r}}{r}}{r^8}+$
$+3\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}=\frac{(\overline{r}\cdot\overline{c})r^4-(\overline{c}\cdot\overline{r})\cdot 4r^2(\overline{r}\cdot\overline{r})}{r^8}+3\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}=0$, deoarece $\overline{c}\cdot\overline{r}=r^2$

$\mathrm{rot}\overline{v}=\nabla\times\overline{v}=-\overline{r}\times\mathrm{grad}\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}+\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}\mathrm{rot}\overline{r}=-\overline{r}\times\frac{\overline{c}\cdot\overline{r}}{r^4}=-\overline{r}\times\frac{\overline{c}\cdot r^4-(\overline{c}\cdot\overline{r})\cdot 4r^2\overline{r}}{r^8}=$
$=\frac{1}{r^4}(\overline{c}\times\overline{r})$

Dacă φ este un câmp scalar de clasă $\mathcal{C}^2$, iar $\overline{v}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ un câmp vectorial de clasă $\mathcal{C}^2$ (într-un anumit deschis din $\mathbb{R}^3$), atunci au sens următoarele:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\overline{v})=\mathrm{div}\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=$$
$$=\mathrm{div}\left[\overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\overline{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}=0$$

$$\text{Analog } \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi)=\begin{vmatrix}\overline{i}&\overline{j}&\overline{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}&\frac{\partial\varphi}{\partial y}&\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=$$
$$=\overline{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)-\overline{j}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right)+\overline{k}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)=0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi)=\mathrm{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\overline{k}+\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi$$

$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\overline{v})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\overline{v})-\left(\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial z^2}\right)$, unde derivata unui câmp vectorial se calculează pe componente.

II)Formula lui Green-Riemann

Definiţia 13.4. Fixăm un reper ortogonal plan xOy de versori $\overline{i},\overline{j}$. O mulţime $M\subset\mathbb{R}^2$ se numeşte **compact bordat** dacă M este compactă şi frontiera $\mathrm{Fr}M$ este reuniunea unui număr finit de curbe plane parametrizate presupuse de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni, nesingulare, simple şi închise; în plus, presupunem că $\mathrm{Fr}M$ este orientată pozitiv.

Exemplul 13.7. Exemple de compacţi bordaţi sunt intergraficele proiectabile pe Ox de tipul $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/a\le x\le b, g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$ cu $g_1,g_2\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ astfel în cât $g_1\le g_2$;în mod similar se pot considera intergrafice proiectabile pe Oy.

Definiţia 13.5. Un compact bordat $M\subset\mathbb{R}^2$ este **elementar** dacă M se poate descompune ca reuniunea unui număr finit de intergrafice proiectabile

pe Ox,având două câte două în comun cel mult puncte ale frontierelor şi dacă M admite o descompunere similară în intergrafice proiectabile pe Oy.
Exemplul 13.8. Triunghiurile, poligoanele convexe, discurile sunt compacţi bordaţi elementari.

Teorema 13.1. *(formula Green-Riemann) Fie $M \subset \mathbb{R}^2$ un compact bordat elementar şi $P(x,y), Q(x,y)$ funcţii de clasă C^1 pe un deschis care conţine M.Atunci*

$$\int_{FrM} Pdx + Qdy = \int\int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Corolarul 13.1. *In condiţiile teoremei 13.1, fie câmpul vectorial $\overline{v} = P(x,y)\overline{i}+$ $+Q(x,y)\overline{j}$. Atunci circulaţia lui $\overline{v}$ în lungul lui FrM este*

$$\int_{FrM} \overline{v} \cdot d\overline{r} = \int\int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

In particular, dacă $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ în M, atunci această circulaţie este nulă .

Exemplul 13.9. Dacă M este un compact bordat elementar care nu conţine originea, atunci $\int_{\text{Fr}M} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = 0$

Intr-adevăr, în acest caz $P = \frac{y}{x^2+y^2}, Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$, deci $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ şi se aplică corolarul 13.1

Dacă Int$M$ conţine punctul $(0,0)$, atunci P şi Q nu mai sunt funcţii de clasă C^1 pe nici un deschis care conţine M. In acest caz, alegând un disc D centrat în origine de rază ρ, conţinut în M rezultă

$\int_{\text{Fr}M} Pdx + Qdy = \int_{\text{Fr}D} Pdx + Qdy = \int_{x^2+y^2=\rho^2} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} =$
$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho\cos t}{\rho^2} \cdot (-\rho\sin t) - \frac{\rho\sin t}{\rho^2} \cdot \rho\cos t\right] dt = 2\pi.$

III) Formula Gauss-Ostrogradski

Definiţia 13.6. O Suprafaţă Σ în $\mathbb{R}^3$ se numeşte **închisă** dacă Σ se obţine prin "deformare continuă " din suprafaţa sferei unitate

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

adică există o aplicţie bijectivă $\varphi\colon S \to \Sigma$ astfel încât φ şi φ^{-1} să fie continue.
Exemplul 13.10. Sfera, elipsoidul, cilindrul $\{x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 3\}\cup$ $\cup\{x^2 + y^2 \le 1, z = 3\}$ sunt suprafeţe închise; planele nu sunt suprafeţe închise.
Definiţia 13.7. Fie un compact bordat elementar M în planul xOy, două funcţii $f_1 \le f_2$ de clasă C^1 pe un deschis din planul xOy care conţine M şi se ia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in M, f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$. O astfel de mulţime se numeşte **intergrafic proiectabil pe planul xOy**; în mod analog, se pot considera intergrafice proiectabile pe planele xOz, yOz.
Definiţia 13.8. O mulţime $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte **compact elementar** dacă Ω poate fi descompus ca reuniune a unui număr finit de intergrafice

proiectabile pe planul xOy având două câte două intersecţii neglijabile (au în comun cel mult puncte ale frontierelor) şi au loc descompuneri similare ale lui Ω în intergrafice proiectabile pe yOz şi xOz; în plus, se presupune că frontiera $\Sigma = \mathrm{Fr}\Omega$ se compune dintr-un număr finit de suprafeţe închise, nesingulare, orientate. Dacă Ω este un compact elementar, atunci se poate defini în mod natural versorul normală exterioară $\overline{N}_e$ în punctul curent al frontierei $\Sigma = \mathrm{Fr}\Omega$.

Exemplul 13.11. Intergraficele, sfera $\{x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$, elipsoidul $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$, cilindrul $\{x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 3\}$ împreună cu bazele, inelul sferic $\{1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}$ etc. sunt compacţi elementari.

Teorema 13.2. *(formula Gauss-Ostrogradski) Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un compact elementar cu frontiera o suprafaţă închisă Σ şi $\overline{v} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis care conţine Ω. Atunci fluxul lui $\overline{v}$ prin Σ după normala exterioară $\overline{n} = \overline{N}_e$ este egal cu integrala divergenţei lui $\overline{v}$ pe Σ, adică*

$$\int\int_{\Sigma}(\overline{v}\cdot\overline{n})d\sigma = \int\int\int_{\Omega}(div\overline{v})dxdydz$$

Observaţia 13.1. Folosind notaţiile din teorema 13.2, dacă $\varphi(x, y, z)$, $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ este un câmp scalar de clasă C^1 $(U \supset \Omega)$ şi dacă $\overline{a}$ este un vector constant arbitrar, atunci pentru $\overline{v} = \varphi\cdot\overline{a}$ avem $\mathrm{div}\overline{v} = \overline{a}\cdot\mathrm{grad}\varphi$ şi formula devine $\overline{a}\cdot\int\int_{\Sigma}\varphi\cdot\overline{N}d\sigma = \overline{a}\cdot\int\int\int_{\Omega}(\mathrm{grad}\varphi)dxdydz$ (integrarea se face pe componente); cum $\overline{a}$ este arbitrar, rezultă **formula gradientului**:

$$\int\int_{\Sigma}\varphi\overline{N}d\sigma = \int\int\int_{\Omega}(\mathrm{grad}\varphi)dxdydz$$

Observaţia 13.2. Dacă $\overline{w}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe U şi notăm $\overline{v} = \overline{w}\times\overline{a}$ (cu $\overline{a}$ vector constant arbitrar), atunci $\mathrm{div}\overline{v} = \overline{a}\cdot\mathrm{rot}\overline{w}$ şi cf. Teoremei 13.2 rezultă **formula rotorului**:

$$\int\int_{\Sigma}(\overline{w}\times\overline{a})\cdot\overline{N}d\sigma = \int\int\int_{\Omega}(\overline{a}\cdot\mathrm{rot}\overline{w})dxdydz,$$

adică

$$\overline{a}\cdot\int\int_{\Sigma}(\overline{N}\times\overline{w})d\sigma = \overline{a}\cdot\int\int\int_{\Omega}\mathrm{rot}\overline{w}dxdydz;$$

deoarece $\overline{a}$ este un vector arbitrar, rezultă

$$\int\int_{\Sigma}(\overline{N}\times\overline{w})d\sigma = \int\int\int_{\Omega}\mathrm{rot}\overline{w}dxdydz$$

Exemplul 13.12. Fie Ω un compact elementar având ca frontieră o suprafaţă închisă Σ care nu conţine originea. Fie $\overline{v} = \frac{\overline{r}}{r^3}$ câmpul newtonian. Dacă 0 nu aparţine lui Ω, atunci $\mathrm{div}\overline{v} = 0$ în fiecare punct din Ω şi cf. Teoremei 13.2 rezultă că fluxul lui $\overline{v}$ prin Σ este nul. Dacă $0 \in \mathrm{Int}\Omega$, atunci

există o bilă deschisă $B_\rho = \{x^2+y^2+z^2 < \rho^2\} \subset \Omega$. Considerăm compactul elementar $\Omega \setminus B_\rho$ având ca frontieră $\mathrm{Fr}\Omega \cup S_\rho$. Deoarece $\mathrm{div}\overline{v} = 0$ în $\Omega \setminus B_\rho$, rezultă , cf. Teoremei 13.2, că fluxul lui $\overline{v}$ prin Σ şi prin S_ρ este acelaşi (în ambele cazuri după normala exterioară). Dar normala exterioară la S_ρ este $\frac{\overline{r}}{r}$ şi fluxul lui $\overline{v}$ prin S_ρ este $\int\int_{S_\rho} \frac{\overline{r}}{r^3} \cdot \frac{\overline{r}}{r} d\sigma = \int\int_{S_\rho} \frac{\rho^2}{\rho^4} d\sigma = \frac{1}{\rho^2} \cdot ariaS_\rho = 4\pi$

In general, dacă Σ este o porţiune de suprafaţă de clasă C^1, nesingulară orientată , astfel încât 0 nu aparţine lui Σ se numeşte **unghi solid** ω în care Σ este văzută din origine, fluxul câmpului $\overline{v} = \frac{\overline{r}}{r^3}$ prin Σ, adică $\omega = \int\int_\Sigma \frac{\overline{r}}{r^3} \cdot \overline{n} d\sigma$

Exemplul 13.13. Presupunem că un lichid, având densitatea de volum constantă c, se află într-un recipient Ω asimilat cu un compact elementar conţinut în semispaţiul $z < 0$ din $\mathbb{R}^3$. Presupunem de asemenea că "presiunea creşte proporţional cu adâncimea", deci câmpul presiunilor lichidului este $\overline{v} = cz\overline{k}$,$c$ fiind densitatea de volum. Fluxul lui $\overline{v}$ prin frontiera Σ a lui Ω se numeşte **forţa ascensională Φ a lichidului**. Aşadar, deoarece $\mathrm{div}\overline{v} = c$, rezultă $\Phi = \int\int_\Sigma \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int\int_\Omega (\mathrm{div}\overline{v}) dxdydz = c \cdot vol(\Omega) =$ $=$ masa lichidului, obţinându-se astfel **legea lui Arhimede.**

IV)Formula lui Stokes

Definiţia 13.9. Fie Σ o suprafaţă de ecuaţie carteziană $z = f(x,y)$, cu f funcţie de clasă C^2 pe un deschis $D \subset \mathbb{R}^2$, cu orientarea pozitivă asociată reprezentării parametrice $x = u, y = v, z = f(u,v), \forall (u,v) \in D$. Dacă $M \subset$ $\subset D$ este un compact bordat elementar, atunci este bine definită o porţiune din suprafaţa Σ, anume $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x,y), (x,y) \in M\}$.Curba $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x,y), (x,y) \in \mathrm{Fr}M\}$ cu orientarea indusă de pe $\mathrm{Fr}M$ se numeşte **bordul orientat al lui** S_1;notând cu $\overline{N}$ versorul normalei la suprafaţa S_1 în punctul curent P al lui C_1, cu $\overline{\tau}$ versorul tangentei în punctul P la curba C_1 şi cu $\overline{n}_e$ versorul normalei exterioare la bordul C_1 (situat în planul tangent la Σ în punctul P, perpendicular pe $\overline{\tau}$ şi "ieşind" din S_1) rezultă că $\overline{N} = \overline{n}_e \times \overline{\tau}$. Orientarea fixată pe bordul C_1 poate fi prezentată sugestiv astfel: "un observator care parcurge C_1 în sensul lui $\overline{\tau}$ şi având capul spre $\overline{N}$, are mâna stângă înspre S_1".

Definiţia 13.10. O porţiune de suprafaţă orientată (de clasă C^2) S se numeşte **elementară** dacă se poate descompune într-un număr finit de porţiuni de suprafaţă $S_1, S_2, \ldots S_p$ prin arce decurbă care sunt părţi ale bordurilor orientate corespunzătoare. In acest caz se poate defini bordul orientat C al lui S, ca fiind drumul închis obţinut prin juxtapunerea arcelor de curbă care aparţin numai la câte unul din bordurile porţiunilor $S_1, S_2, \ldots S_p$.

Teorema 13.3. ***(formula lui Stokes)*** *Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o porţiune de suprafaţă elementară de clasă C^2 şi C bordul orientat, închis al lui S. Fie $\overline{v}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un deschis din $\mathbb{R}^3$ care conţine S. Atunci circulaţia lui $\overline{v}$ în lungul lui C este egală cu fluxul rotorului lui $\overline{v}$ prin S, adică*

$$\int_C \overline{v} \cdot d\overline{r} = \int\int_S rot\overline{v} \cdot \overline{N} d\sigma$$

Exemplul 13.14. Considerăm octantul de sferă $x^2+y^2+z^2 = R^2, x, y, z \geq$ ≥ 0 şi calculăm circulaţia câmpului newtonian $\overline{v} = \frac{\overline{r}}{r^3}$ în lungul bordului C.

Cf. teoremei 13.3, luând pentru S porţiunea de sferă corespunzătoare, rezultă

$\int_C \overline{v} \cdot d\overline{r} = \int\int_S \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{N} d\sigma = 0$,deoarece $\text{rot}\overline{v} = \text{rot}\frac{\overline{r}}{r^3} = 0$

13.2 Probleme rezolvate

1. Să se verifice formula lui Green pentru funcţiile $P(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, dacă $(x,y) \neq (0,0)$ şi $P(0,0) = 0$ şi $Q(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, dacă $(x,y) \neq (0,0)$ şi $Q(0,0) = 0$ pentru domeniul $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

   Soluţie. Funcţiile P şi Q nu sunt continue în origine, deoarece
   $\lim\limits_{x\to\infty, y=mx} P(x,y) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \neq 0$ şi
   $\lim\limits_{x\to\infty, y=mx} Q(x,y) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \neq 0$ pentru $m \neq 0$
   Prin urmare,nu se poate aplica Teorema 13.1, funcţiile P şi Q nefiind continue în D. Totuşi formula lui Green este verificată . Observăm că $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, pentru $(x,y) \neq (0,0)$ şi $\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) =$ $= 0$ (cu ajutorul definiţiei). Deci $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ în D şi membrul drept din formula lui Green este egal cu 0. Pentru a arăta că şi primul membru al formulei are tot valoarea 0, folosim pentru cercul (C) : $x^2 + y^2 = 1$ reprezentarea $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Obţinem
   $\int_C Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi}(-\cos t \sin t + \cos t \sin t)dt = 0$
   Deci formula lui Green se verifică . □

   Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Green, următoarele integrale curbilinii :

2. $I = \int_C y^2dx + x^2dy, (C) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ şi $x = t, y = 0, t \in [-1, 1]$

   Soluţie. Curba (C) mărgineşte domeniul $D : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$ şi este o curbă regulată închisă . Funcţiile $P(x,y) = y^2, Q(x,y) = x^2$ sunt continue şi cu derivate parţiale continue în D şi $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x - y)$. Se poate aplica teorema 13.1:
   $\int_C y^2dx + x^2dy = 2\int\int_D(x - y)dxdy = 2\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^2(\cos\theta - \sin\theta)d\rho d\theta =$
   $= 2\int_0^{\pi}(\cos\theta - \sin\theta)d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = -\frac{4}{3}$ □

3. $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2}dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{(x^2 + y^2)})]dy, (C) : x^2 + y^2 - 4x-$ $-6y + 12 = 0$

Soluţie. Avem $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, Q(x,y) = y[xy + \ln(x + \sqrt{(x^2+y^2)})]$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = y\left(y + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Atunci $I = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\int_D y^2 dxdy$, unde $D : x^2+y^2-$ $-4x-6y+12 \le 0$

Trecând la coordonate polare $x = 2+\rho\cos\theta, y = 3+\rho\sin\theta$, $\theta \in [0,2\pi), \rho \in [0,1]$, obţinem
$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(9+6\rho\sin\theta+\rho^2\sin^2\theta)d\rho d\theta = 10\pi$ □

4. $I = \int_{ABO}(e^x \sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$, unde ABO e semicercul $x^2+y^2-ax = 0, y \ge 0$ parcurs în sens trigonometric

Soluţie. Completăm conturul ABO cu segmentul OA. Atunci
$I = \int_{OABO}(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy-$
$-\int_{OA}(e^x \sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = I_1 - I_2$

Calculăm I_1 cu teorema 13.1 :
$I_1 = m\int\int_D dxdy = \frac{m\pi a^2}{8}$, unde $D : x^2+y^2-ax \le 0, y \ge 0$

Pentru a calcula I_2, parametrizăm segmentul $OA : x = t, y = 0, t \in$ $\in [0,a] \Longrightarrow I_2 = 0$ □

5. $I = \int_C (x+y)dx - (x-y)dy$, unde $C : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

Soluţie. $I = \int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\left[\frac{\partial-(x-y)}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y}\right] dxdy =$
$= \int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} -2dxdy = -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 ab d\rho d\theta = -2\pi ab$ □

6. $I = \int_C 2\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}dx + [x+\ln(x^2+y^2)]dy$, unde $C : (x-2)^2+y^2 = 1$

Soluţie. Avem $P(x,y) = 2\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}, Q(x,y) = x+\ln(x^2+y^2)$ şi
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2}$

Atunci $I = \int\int_{(x-2)^2+y^2\le 1}\left(\frac{x^2+y^2+2x}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\right) dxdy =$
$= \int\int_{(x-2)^2+y^2\le 1} dxdy = \pi$ □

7. Fie $\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$.
a. Să se calculeze integrala curbilinie $\int_{C(O,R)}\alpha$, unde, am notat cu $C(O,R)$ cercul de centru O şi rază $R > 0$.
b. Să se calculeze $\int_\Gamma \alpha$, unde, Γ este o curbă arbitrară închisă astfel încât $O \notin \Gamma$.

Soluţie. **a.** Să observăm, mai întâi că $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\})$, deci pentru calculul integralei de la punctul a nu se poate aplica formula Green-Riemann. Folosim definiţia integralei curbilinii; parametrizăm cercul:

$$x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin t,\ t \in [0, 2\pi)$$

şi obţinem:

$$\int_{C(O,R)} \alpha = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b. Notăm cu K compactul mărginit de curba Γ. Distingem două cazuri: dacă $O \notin K$ (se poate aplica formula Green-Riemann) sau dacă $O \in K$ (nu se poate aplica formula Green-Riemann).
Presupunem mai întâi că $O \notin K$; atunci:

$$\int_\Gamma \alpha = \int\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right) dxdy = 0.$$

Presupunem acum că $O \in K$; fie $R > 0$ astfel încât $C(O,R)$ este inclus în interiorul lui K. Notăm cu $D(O,R)$ discul deschis de centru O şi rază R. Fie A compactul $A = K \setminus D(O,R)$. Bordul orientat al lui A este reuniunea $\partial A = \Gamma \cup C(O,R)$, sensul pe cerc fiind sensul trigonometric negativ. Deoarece $O \notin A$, avem:

$$\int_{\partial A} \alpha = \int\int_A 0 dxdy = 0.$$

Rezultă :

$$\int_\Gamma \alpha = \int_{C(O,R)} \alpha = 2\pi.$$

□

8. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii direct şi aplicând formula Green-Riemann:
a. $\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}(-ydx + xdy)$, $\Gamma = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.
b. $\int_\Gamma xydx + \frac{x^2}{2}dy$,
$\Gamma = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \leq 0 \leq y\} \cup \{(x,y) \mid x + y = -1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

Soluţie. Pentru calculul direct se parametrizează cele două curbe şi se aplică definiţia integralei curbilinii. Vom calcula acum integralele cu ajutorul formulei Green-Riemann.
a. Elipsa Γ este închisă iar 1-forma diferenţială este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^2$, deci putem aplica formula Green-Riemann (notăm K mulţimea compactă mărginită de Γ):

$$\int_\Gamma e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}(-ydx + xdy) = \int\int_K 2e^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy,$$

integrala dublă calculându-se cu coordonate polare generalizate.
b. Curba Γ nu este închisă , deci nu putem aplica direct formula Green-Riemann. Fie $A(0,-1)$ şi $B(0,1)$ şi fie $[AB]$ segmentul orientat (de la A către B) determinat de aceste puncte. Fie $\Lambda = \Gamma \cup [AB]$; atunci Λ este o curbă închisă şi deci, aplicând formula Green-Riemann, obţinem (notăm cu K compactul mărginit de Λ):

$$\int_{\Lambda} xydx + \frac{x^2}{2}dy = \int\int_K 0dxdy = 0.$$

Rezultă deci:

$$\int_{\Gamma} xydx + \frac{x^2}{2}dy = -\int_{[AB]} xydx + \frac{x^2}{2}dy = 0,$$

ultima integrală curbilinie calculându-se imediat cu definiţia. □

9. Să se calculeze circulaţia câmpului de vectori $\overline{V}$ pe curba Γ în cazurile:
a. $\overline{V} = y^2\overline{i} + xy\overline{j}$,
$\Gamma = \{(x,y); x^2+y^2=1, y>0\} \cup \{(x,y); y=x^2-1, y\leq 0\}$.
b. $\overline{V} = e^x \cos y\overline{i} - e^x \sin y\overline{j}$.
Γ este o curbă arbitrară continuă în semiplanul superior care uneşte punctele $A(1,0)$ şi $B(-1,0)$, sensul fiind de la A către B.

Soluţie. **a.** Vom aplica formula Green-Riemann; notând cu K interiorul curbei Γ, obţinem:

$$\int_{\Gamma} \overline{V}d\overline{r} = \int\int_K -ydxdy = -\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} ydy.$$

b. Curba nu este închisă ; fie $[BA]$ segmentul orientat (de la B către A) şi fie curba închisă $\Lambda = \Gamma \cup [BA]$. Calculăm circulaţia lui $\overline{V}$ pe curba Λ cu ajutorul formulei Green-Riemann (notăm cu K compactul mărginit de Λ):

$$\int_{\Lambda} \overline{V}d\overline{r} = \int\int_K 0dxdy = 0,$$

deci circulaţia pe curba Γ este egală cu circulaţia pe segmentul orientat $[AB]$:

$$\int_{\Gamma} \overline{V}d\overline{r} = \int_{[AB]} \overline{V}d\overline{r} = -\int_0^1 e^t dt = 1-e.$$

□

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski, următoarele integrale:

10. $I=\int\int_{\Sigma}2x^2yzdydz+z^2dzdx+xyz^2dxdy$, unde Σ e faţa exterioară a semielipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ limitat de planul $z=0$.

Soluţie. $I=\int\int\int_V(4xyz+0+2xyz)dxdydz=6\int\int\int_V xyzdxdydz=$
$=6\int\int_D\left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}xyzdz\right)dxdy=6\int\int_D xy\frac{z^2}{2}/_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dxdy=$
$=3c^2\int\int_D xy\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$
$=3c^2\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1}xy\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$
$=3c^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 a\rho\cos\theta b\rho\sin\theta(1-\rho^2)ab\rho d\rho d\theta=$
$=3a^2b^2c^2\int_0^1\rho^3(1-\rho^2)d\rho\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=$
$=3a^2b^2c^2\left(\frac{\rho^4}{4}/_0^1-\frac{\rho^6}{6}/_0^1\right)\frac{1}{4}(-\cos 2\theta/_0^{2\pi})=0$ □

11. $I=\int\int_{\Sigma}x^3dydz+x^2ydzdx+x^2zdxdy$, unde Σ este suprafaţa cilindrului $x^2+y^2=r^2$ cuprinsă între planele $z=0,z=a$

Soluţie. $I=\int\int\int_V(3x^2+x^2+x^2)dxdydz=\int\int\int_V 5x^2dxdydz=$
$=\int_0^{2\pi}\int_0^r\int_0^a\rho^3\cos^2\theta dzd\rho d\theta=\frac{5\pi ar^4}{4}$ □

12. Să se determine fluxul câmpului vectorial $\overline{v}=2x\overline{i}+y\overline{j}-z\overline{k}$ prin suprafaţa $\Sigma: y^2+z^2=ax, 0\leq x\leq a$ după normala $\overline{n}$ la suprafaţă care face un unghi ascuţit cu semiaxa negativă Ox.

Soluţie. Fluxul Φ al câmpului vectorial $\overline{v}$ prin suprafaţa Σ este dat de integrala de suprafaţă $\Phi=\int\int_{\Sigma}\overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma$.
Inchidem suprafaţa Σ cu discul Σ_1 situat în planul $x=a$.
Notăm $S=\Sigma_1\cup\Sigma$.
Teorema 13.2 ne dă $\int\int_S\overline{v}\cdot\overline{N}d\sigma=\int\int\int_V \text{div}\overline{v}dxdydz$, unde $\overline{N}$ e normala exterioară la suprafaţa S şi Fr$V=S$
Avem div$\overline{v}=\frac{\partial}{\partial x}(2x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(-z)=2$
Atunci $\int\int_S\overline{v}\cdot\overline{N}d\sigma=\int\int\int_V 2dxdydz=2\int\int_D\left(\int_{\frac{y^2+z^2}{a}}dx\right)dydz=$
$=2\int\int_D\left(a-\frac{y^2+z^2}{a}\right)dzdy$,unde $D: y^2+z^2\leq a^2$
Deci $\int\int_S\overline{v}\cdot\overline{N}d\sigma=\int_0^a\int_0^{2\pi}\left(a-\frac{\rho^2}{a}\right)\rho d\theta d\rho=\pi a^3$
Dar,$\int\int_S\overline{v}\cdot\overline{N}d\sigma=\int\int_{\Sigma}\overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma+\int\int_{\Sigma_1}\overline{v}\cdot\overline{n}_1d\sigma$, unde $\overline{n}_1=(1,0,0)$ e normala la suprafaţa Σ_1. Rezultă $\Phi=\int\int_S\overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma=\pi a^3-\int\int_{\Sigma_1}\overline{v}\cdot\overline{n}_1d\sigma$
Pe suprafaţa $\Sigma_1: x=a,(y,z)\in D,d\sigma=dxdy$. Atunci
$\int\int_{\Sigma_1}\overline{v}\cdot\overline{n}_1d\sigma=\int\int_{\Sigma_1}2xd\sigma=\int\int_D 2adzdy=2aaria(D)=2\pi a^3\Longrightarrow$
$\Longrightarrow\Phi=\int\int_S\overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma=\pi a^3-2\pi a^3=-\pi a^3$ □

13. Să se determine fluxul câmpului vectorial $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ prin suprafaţa închisă de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ şi planele $z = 0$ şi $z = a$, după normala exterioară la suprafaţa.

Soluţie. Fluxul Φ al câmpului vectorial $\overline{v}$ prin suprafaţa închisă Σ este dat de integrala de suprafaţă $\Phi = \int\int_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma$.

Cf. Teoremei 13.2 avem $\Phi = \int\int_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int\int_V \text{div}\overline{v} dxdydz$, unde V este volumul închis de suprafaţa Σ.

$\text{div}\overline{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$

Atunci $\Phi = \int\int\int_V 3dxdydz = 3vol(V) = 3\pi R^2 a$

Calculăm fluxul direct, fără Teorema 13.2. Fie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, unde Σ_1 e baza cilindrului cu normala $\overline{n}_1 = (0, 0, -1)$,$\Sigma_2$ e baza cilindrului cu normala $\overline{n}_2 = (0, 0, 1)$,$\Sigma_3$ e suprafaţa laterală a cilindrului cu normala $\overline{n}_3 = \frac{\text{grad} f}{\|\text{grad} f\|} = \frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right)$,unde $f = x^2 + y^2 - R^2$

Atunci

$\Phi = \int\int_{\Sigma_1} \overline{v} \cdot \overline{n}_1 d\sigma + \int\int_{\Sigma_2} \overline{v} \cdot \overline{n}_2 d\sigma + \int\int_{\Sigma_3} \overline{v} \cdot \overline{n}_3 d\sigma = \int\int_{\Sigma_1} -z d\sigma +$
$+ \int\int_{\Sigma_2} z + \int\int_{\Sigma_3} \left(x \cdot \frac{x}{R} + y \cdot \frac{y}{R} + z \cdot 0\right) d\sigma = \int\int_{\Sigma_1} 0 + \int\int_{\Sigma_2} a +$
$+ \int\int_{\Sigma_3} \frac{x^2+y^2}{R} = \int\int_{\Sigma_2} a + \int\int_{\Sigma_3} R = a \cdot aria\Sigma_2 + R \cdot aria\Sigma_3 =$
$= a\pi R^2 + R2\pi Ra = 3\pi R^2 a$ □

14. Calculaţi fluxul câmpului vectorial $\overline{v} = x\overline{i} + z^2\overline{j} + y^2\overline{k}$ prin suprafaţa laterală a conului $z^2 = x^2 + y^2$ mărginit de planul $z = 1$, pentru $z \geq 0$.

Soluţie. Pentru a aplica formula lui Gauss-Ostrogradski închidem suprafaţa formată din conul $z^2 = x^2 + y^2$ cu discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$

Avem $\text{div}\overline{v} = 1 \Longrightarrow \Phi = \int\int_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int\int_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1} dxdydz = \frac{\pi}{3}$

Calculăm fluxul lui $\overline{v}$ prin discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ care mărgineşte conul după normala exterioară . Aplicăm definiţia observând că $\overline{n} = \overline{k}$ şi $\overline{v} \cdot \overline{n} = y^2$. Deci $\int\int_{z=1,x^2+y^2\leq 1} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int_{z=1,x^2+y^2\leq 1} y^2 d\sigma =$
$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} y^2 dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2\theta d\theta d\rho = \frac{\pi}{4}$

Fluxul cerut va fi diferenţa dintre fluxul lui $\overline{v}$ prin con şi fluxul lui $\overline{v}$ prin discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$,deci $\Phi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ □

15. **(Legea lui Gauss)** Pentru orice $q > 0$, considerăm câmpul scalar

$$f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi r}$$

şi fie câmpul de gradienţi:

$$\overline{E} = -\text{grad}f.$$

Câmpul scalar f reprezintă potenţialul electric (sau potenţial Newtonian) asociat sarcinei electrice q plasate în O, iar $\overline{E}$ este câmpul electric generat (sau câmp Newtonian).
a. Să se expliciteze $\overline{E}$ şi să se demonstreze că este câmp solenoidal, adică : $\text{div}\overline{E} = 0$.
b. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior este nul.
c. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce conţine originea în interior este q, (legea lui Gauss).

Soluţie. **a.** Putem calcula $\overline{E}$ direct cu definiţia, sau aplicând proprietăţile gradientului; obţinem:

$$\overline{E} = -\text{grad}f = \frac{q}{4\pi}\frac{\overline{r}}{r^3}.$$

Arătăm acum că $\overline{E}$ este solenoidal:

$$\text{div}\overline{E} = -\text{grad}(\text{div}f) = -\Delta f = \frac{q}{4\pi r^6}\left(3r^3 - 3r(x^2+y^2+z^2)\right) = 0.$$

b. Fie Σ o suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior. Deoarece câmpul electric $\overline{E}$ este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski şi deci, (notăm cu K compactul mărginit de Σ şi cu $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la Σ), obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_\Sigma \overline{E}\,\overline{n}d\sigma = \int\int\int_K \text{div}\overline{E}dxdydz = 0.$$

c. Fie acum Σ o suprafaţă închisă ce conţine originea în interior. Deoarece $\overline{E}$ nu este de clasă C^1 pe compactul K mărginit de Σ, ($\overline{E}$ nefiind de clasă C^1 în origine), nu putem aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru a calcula fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ. Fie $R > 0$ astfel încât sfera de centru O şi rază R (notată în continuare cu S), să fie inclusă în interiorul lui Σ. Fie suprafaţa (închisă) $\Sigma_1 = \Sigma \cup S$, orientată după normala exterioară (deci pe S este normala interioară la sferă). Fie K_1 mulţimea compactă mărginită de Σ_1. Deoarece $O \notin K_1$, fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ_1 este nul (conform (b)). Rezultă că fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ este egal cu fluxul lui $\overline{E}$ prin S (orientată după normala exterioară $\overline{n} = \frac{\overline{r}}{R}$ la sferă):

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_S \overline{E}\,\overline{n}d\sigma = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = q.$$

□

16. Fie $\overline{v} = yz\overline{i} + 2xz\overline{j} - x^2\overline{k}$.Să se calculeze fluxul lui $\overline{v}$ prin elipsoidul $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$ după normala exterioară , precum şi circulaţia lui $\overline{v}$ în lungul curbei C de intersecţie a elipsoidului cu planul $z = 1$, parcursă pozitiv o dată în raport cu Oz.

Soluţie. Cum $\text{div}\overline{v} = 0$, rezultă , cf. Teoremei 13.2, că fluxul $\Phi = 0$

Pentru circulaţie putem aplica teorema 13.3, luând ca suprafaţă Σ porţiunea din planul $z = 1$ interioară curbei C.

Avem $\text{rot}\overline{v} = -2x\overline{i} + (2x + y)\overline{j} + z\overline{k}$ şi $\overline{n} = \overline{k}$

Atunci $\int_C \overline{v}d\overline{r} = \int\int_\Sigma(\text{rot}\overline{v}) \cdot \overline{n}d\sigma = \int\int_\Sigma d\sigma = aria\Sigma = 2\pi$ (Aria unei elipse de semiaxe a,b este πab şi se poate calcula cu ajutorul integralei curbilinii) □

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii cu ajutorul formulei lui Stokes:

17. $I = \int_C ydx + zdy + xdz$,unde C este cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = = 0$, parcurs în sens invers sensului de mişcare a acelor de ceasornic, dacă privim din direcţia pozitivă a axei Ox

Soluţie. $I = \int_C ydx + zdy + xdz = \int\int_\Sigma -dydz - dzdx - dxdy = = -\int\int_\Sigma \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}\int\int_\Sigma d\sigma$,deoarece $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sunt cosinuşii directori ai normalei la faţa Σ

Dacă D este interiorul proiecţiei cercului C pe planul xOy, atunci (prin eliminarea lui z între cele două ecuaţii ale lui C) $D : x^2 + xy + y^2 \leq \leq \frac{a^2}{2}, z = 0$

Deci $I = -\sqrt{3}\int\int_D dxdy = -\pi a^2\sqrt{3}$ □

18. $I = \int_C(y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, unde C este elipsa obţinută prin intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$, parcursă astfel încât proiecţia curbei C pe planul xOy să fie orientată pozitiv

Soluţie. Avem $\Sigma : z = 1 - z, (x, y) \in D$, unde D este discul din planul xOy mărginit de curba Γ-proiecţia curbei C în acest plan. Integrala se calculează pe faţa superioară a suprafeţei Σ cu normala $\overline{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$

$I = \int\int_\Sigma -2dydz - 2dzdx - 2dxdy = -2\int\int_\Sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\sigma = = -\frac{4}{\sqrt{2}}\int\int_D \sqrt{2}dxdy = -4ariaD = -4\pi$ □

19. Fie Σ emisfera superioară a sferei unitate şi $\overline{v} = z\overline{i} + x\overline{j} + xyz\overline{k}$. Aflaţi fluxul rotorului lui $\overline{v}$ prin Σ orientată după normala exterioară .

Soluţie. Folosind teorema 13.3 avem de calculat circulaţia lui $\overline{v}$ de-a lungul cercului $z = 0, x^2 + y^2 = 1$:

$\int_C \overline{v}d\overline{r} = \int_C zdx + xdy + xyzdz = \int_0^{2\pi} \cos^2 tdt = \pi$

Integrala poate fi calculată direct:

$\text{rot}\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & xyz \end{vmatrix} = xz\overline{i} + (1 - yz)\overline{j} + \overline{k}$ şi observăm că $\overline{n} = \overline{r}$

Deci $\text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n} = x^2z + y(1 - yz) + z$

$\int\int_\Sigma \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n}d\sigma = \int\int_\Sigma [x^2z + y(1 - yz) + z]d\sigma =$
$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1}[(x^2 - y^2 + 1)\sqrt{1 - x^2 - y^2} + y]\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} =$
$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1}(x^2 - y^2 + 1)dxdy + \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy = \pi$ (prin trecere la coordonate polare) □

20. Găsiţi circulaţia câmpului vectorial $\overline{v} = y^2\overline{i} + xy\overline{j} + (x^2 + y^2)\overline{k}$ prin conturul format din intersecţia paraboloidului $x^2 + y^2 = Rz$ cu planele $x = 0, y = 0, z = R$ parcurs în sens pozitiv relativ la normala exterioară a paraboloidului.

Soluţie. Direct: $\int_{OAB} \overline{v}d\overline{r} = \int_{\widehat{OA}} \overline{v}d\overline{r} + \int_{\widehat{AB}} \overline{v}d\overline{r} + \int_{\widehat{BO}} \overline{v}d\overline{r}$

Scriem ecuaţiile parametrice ale curbelor:
$\widehat{OA} : x = 0, y = t, z = \frac{t^2}{R}, t \in [0, R]$
$\widehat{AB} : x = R\sin t, y = R\cos t, z = R, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$\widehat{OB} : x = t, y = 0, z = \frac{t^2}{R}, t \in [0, R]$

$\int_{\widehat{OA}} \overline{v}d\overline{r} = \int_{\widehat{OA}} y^2dx + xydy + (x^2 + y^2)dz = \int_0^R t^2 \cdot \frac{2t}{R}dt = \frac{R^3}{2}$

$\int_{\widehat{AB}} \overline{v}d\overline{r} = -\int_0^R t^2 \cdot \frac{2t}{R}dt = -\frac{R^3}{2}$

$\int_{\widehat{AB}} \overline{v}d\overline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos^3 tdt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2 t \cos tdt$

Pentru calculul integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 tdt$ facem schimbarea $\sin t = \sqrt{u} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1-\sin^2 t)dt = \int_0^1 (1-u)u^{-\frac{1}{2}}du = B\left(\frac{1}{2}, 2\right) =$
$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(2+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}$

Deducem că $\int_{\widehat{AB}} \overline{v}d\overline{r} = R^3$

Circulaţia este $\int_{OAB} \overline{v}d\overline{r} = R^3\left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = R^3$ Cu teorema 13.3: Curba este porţiunea de paraboloid orientată după normala exterioară

$\int_{OAB} \overline{v}d\overline{r} = \int\int_{z=\frac{1}{R}(x^2+y^2), x^2+y^2\leq R^2, x,y\geq 0} \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n}d\sigma$

Avem $\text{rot}\overline{v} = 2y\overline{i} - 2x\overline{j} - y\overline{k}$

Fie $\varphi = -x^2 - y^2 + Rz$. Normala la suprafaţă este $\overline{n} = \frac{\text{grad}\varphi}{\|\text{grad}\varphi\|} =$
$= \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}}(-2x, -2y, R)$

$\int\int_{z=\frac{1}{R}(x^2+y^2), x^2+y^2\leq R^2, x,y\geq 0} \text{rot}\overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma =$
$= 3\int\int_{x^2+y^2\leq R^2, x,y\geq 0}\left(-\frac{2x}{R}\cdot 2y + \frac{4xy}{R} - y\right)dxdy =$
$= 3\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\rho^2\sin\theta d\theta d\rho = R^3$ □

21. Calculaţi circulaţia vectorului $\overline{v} = (x+y)\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (z+x)\overline{k}$ de-a lungul elipsei $C: x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$. Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes şi calculând fluxul rotorului lui $\overline{v}$ prin suprafeţele :

a) elipsa C;

b) elipsoidul $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ situat deasupra planului xOy.

Soluţie. Direct vom folosi reprezentarea parametrică a elipsei C : $x = \cos\theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, z = 0$ şi obţinem

$\int_C \overline{v}d\overline{r} = \int_C (x+y)dx + (y+z)dy + (z+x)dz =$
$= \int_0^{2\pi}\left[\left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)\cdot(-\sin\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right]d\theta =$
$= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes :

a) $\text{rot}\overline{v} = -(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}), \overline{n} = \overline{k}$

Atunci

$\int\int_\Sigma(\text{rot}\overline{v})\cdot\overline{n}d\sigma = -\int\int_\Sigma d\sigma = -\int\int_{x^2+2y^2\leq 1} dxdy = -\frac{\pi}{2}$

b) Pentru suprafaţa elipsoidului situată deasupra planului xOy se obţine

$\overline{n} = \frac{x\overline{i}+2y\overline{j}+4z\overline{k}}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}, (\text{rot}\overline{v})\cdot\overline{n} = -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}, d\sigma = \frac{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}{4z}dxdy$

Atunci

$\int\int_\Sigma(\text{rot}\overline{v})\cdot\overline{n}d\sigma = \int\int_\Sigma -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}d\sigma =$
$= \int\int_{x^2+2y^2\leq 1} -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}{4z}dxdy =$
$= -\frac{1}{4}\int\int_{x^2+2y^2\leq 1}\frac{x+2y+4z}{z}dxdy =$
$= -\frac{1}{4}\int\int_{x^2+2y^2\leq 1}\frac{x+2y+4\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2-2y^2}}{\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2-2y^2}}dxdy =$
$= -\frac{1}{2}\int\int_{x^2+2y^2\leq 1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} + 2\right)dxdy =$
$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{\rho(\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta)}{\sqrt{1-\rho^2}} + 2\right)\rho d\rho d\theta\right] = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ □

22. Să se calculeze direct şi cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$\int_{\Gamma}(y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

unde Γ este poligonul de intersecţie dintre cubul $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ şi planul $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Soluţie. Γ este un hexagon regulat. Pentru a calcula integrala cu definiţia trebuie parametrizate laturile hexagonului; de exemplu, latura din planul xOy are parametrizarea:

$$x(t) = t, y(t) = \frac{3}{2} - t,\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Calculăm acum integrala aplicând formula lui Stokes. Fie Σ porţiunea din planul $x + y + z = \frac{3}{2}$ situată în interiorul cubului (interiorul hexagonului). Proiecţia lui Σ pe planul xOy este mulţimea

$$D = \{(x, y);\ \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2},\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},$$

a cărei arie este $\frac{3}{4}$. O parametrizare (carteziană) a suprafeţei Σ este

$$z = \frac{3}{2} - x - y,\ (x, y) \in D.$$

Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_{\Gamma}(y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz =$$

$$= -2\int_{\Sigma}(x + y)dx \wedge dy + (y + z)dy \wedge dz + (z + x)dz \wedge dx =$$

$$= -2\int\int_{D} 3dxdy = -6\,\text{aria}(D) = -\frac{9}{2}.$$

□

13.3 Probleme propuse

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Green,următoarele integrale curbilinii :

1. $I = \int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy), (C) : x^2 + y^2 = 1$

   R: $I = \int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy) = 2\pi e$

2. $I = \int_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, unde C este curba închisă de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = x$,parcursă în sens direct

   R: $I = -\frac{1}{3}$

3. $I = \int_C (x+y)dx - (x-y)dy$,$C : x^2 + y^2 = r^2$

   R: $I = -2\pi r^2$

4. $I = \int_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, unde C este triunghiul cu vârfurile $O(0,0)$,
   $A(1,0), B(0,1)$

   R: $I = -1$

   Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski, următoarele integrale:

5. $I = \int\int_\Sigma x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$,$\Sigma$ este faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

   R: $I = 0$

6. $I = \int\int_\Sigma x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$,$\Sigma$ este faţa exterioară a suprafeţei închise $x^2 + y^2 = z^2, z = h$

   R: $I = \frac{9\pi}{10} h^5$

7. $I = \int\int_\Sigma xyz(xdydz + ydzdx + zdxdy)$, unde $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 =$
   $= a^2, x, y, z \geq 0$

   R: $I = \frac{a^6}{8}$

   Să se calculeze fluxul $\Phi = \int\int_\Sigma \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma$ cu formula lui Gauss-Ostrogradski:

8. $\overline{v} = -y\overline{i} + x\overline{j}$, unde Σ este cubul unitate

   R: $\Phi = 0$

9. $\overline{v} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, unde Σ este sfera unitate

   R: $\Phi = 0$

10. $\overline{v} = x\overline{i} + 2y\overline{j}$, unde Σ are feţele $x = 0, y = 0, z - 0, x + y + z = 1$

    R: $\Phi = \frac{1}{2}$

11. Să se calculede fluxul câmpului $\overline{v} = (y-z)\overline{i} + (z-x)\overline{j} + (x-y)\overline{k}$ prin suprafaţa deschisă $\Sigma : x^2 + y^2 = 4 - z, z > 0$, direct şi folosind formula Gauss-Ostrogradski, normala făcând unghi ascuţit cu Oz.

    R: $\Phi = 0$

12. Fie $V : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1$ şi $\overline{v} = 3x^2 z\overline{i} + (y^2 - 2x)\overline{j} + z^3\overline{k}$. Să se calculeze $\int\int_{\mathrm{Fr}V} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma$.

    R: $\int\int_{\mathrm{Fr}V} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \frac{216\pi}{5}$

13. Calculaţi fluxul vectorului $\overline{v} = \frac{\overline{r}}{r}$ prin suprafaţa $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z = h, h > 0$. Să se verifice rezultatul cu formula Gauss-Ostrogradski.

    R: $\Phi = 2\pi h^2(\sqrt{2} - 1)$

14. Calculaţi fluxul vectorului $\overline{v} = \frac{\overline{r}}{r^q}$ prin suprafaţa închisă mărginită de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0$. Să se verifice rezultatul cu formula Gauss-Ostrogradski.

    R: $\Phi = \frac{\pi}{2} R^{3-q}$

    Să se calculeze următoarele integrale curbilinii cu ajutorul formulei lui Stokes:

15. $I = \int_C y dx + z dy + x dz$, unde $C : x = a\cos^2 t, y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin 2t, z = a \sin^2 t$

    R: $I = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} a^2$ (scriem ecuaţia curbei C eliminând parametrul t şi obţinem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + z = 0$)

16. $I = \int_{ABC} (z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$ luată de-a lungul laturilor triunghiului determinat de punctele $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$

    R: $I = ab + bc + ac$

17. Calculaţi circulaţia câmpului vectorial $\overline{v} = y\overline{i} - z\overline{j} + x\overline{k}$ de-a lungul elipsei $y = x, \frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2$, versorul normalei la planul curbei $\overline{n} = \frac{\overline{i}-\overline{j}}{\sqrt{2}}$, folosind formula lui Stokes.

    R: $2\pi a^2$

18. Aflaţi circulaţia câmpului vectorial $\overline{v} = 3z\overline{i} + 2y\overline{k}$ de-a lungul cercului cu centrul în $(1, 2, 3)$ de rază r din planul $x + y + z = 6$ parcurs în sens pozitiv faţă de $\overline{n} = \frac{\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}}{\sqrt{3}}$ folosind formula lui Stokes.

    R: $-\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$

19. Calculaţi circulaţia vectorului $\overline{v} = y\overline{i} + yz\overline{j} + zx\overline{k}$ de-a lungul cercului $C : x^2 + y^2 = 1, z = 2$. Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes şi calculând fluxul rotorului lui $\overline{v}$ ce străbate suprafaţa sferei $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ situate deasupra planului $z = 2$.

    R: $-\pi$

10. $I = \int\int_\Sigma 2x^2yzdydz + z^2dzdx + xyz^2dxdy$, unde Σ e fața exterioară a semielipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ limitat de planul $z = 0$.

    Soluție. $I = \int\int\int_V (4xyz + 0 + 2xyz)dxdydz = 6\int\int\int_V xyzdxdydz =$
    $= 6\int\int_D \left(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} xyzdz\right) dxdy = 6\int\int_D xy\frac{z^2}{2}/_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy =$
    $= 3c^2\int\int_D xy\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy =$
    $= 3c^2\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} xy\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dxdy =$
    $= 3c^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 a\rho\cos\theta b\rho\sin\theta(1-\rho^2)ab\rho d\rho d\theta =$
    $= 3a^2b^2c^2\int_0^1 \rho^3(1-\rho^2)d\rho\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta =$
    $= 3a^2b^2c^2\left(\frac{\rho^4}{4}/_0^1 - \frac{\rho^6}{6}/_0^1\right)\frac{1}{4}(-\cos 2\theta/_0^{2\pi}) = 0$ □

11. $I = \int\int_\Sigma x^3dydz + x^2ydzdx + x^2zdxdy$, unde Σ este suprafața cilindrului $x^2 + y^2 = r^2$ cuprinsă între planele $z = 0, z = a$

    Soluție. $I = \int\int\int_V (3x^2 + x^2 + x^2)dxdydz = \int\int\int_V 5x^2dxdydz =$
    $= \int_0^{2\pi}\int_0^r\int_0^a \rho^3\cos^2\theta dzd\rho d\theta = \frac{5\pi ar^4}{4}$ □

12. Să se determine fluxul câmpului vectorial $\overline{v} = 2x\overline{i} + y\overline{j} - z\overline{k}$ prin suprafața $\Sigma : y^2 + z^2 = ax, 0 \le x \le a$ după normala $\overline{n}$ la suprafață care face un unghi ascuțit cu semiaxa negativă Ox.

    Soluție. Fluxul Φ al câmpului vectorial $\overline{v}$ prin suprafața Σ este dat de integrala de suprafață $\Phi = \int\int_\Sigma \overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma$.
    Inchidem suprafața Σ cu discul Σ_1 situat în planul $x = a$.
    Notăm $S = \Sigma_1 \cup \Sigma$.
    Teorema 13.2 ne dă $\int\int_S \overline{v}\cdot\overline{N}d\sigma = \int\int\int_V \text{div}\overline{v}dxdydz$, unde $\overline{N}$ e normala exterioară la suprafața S și $\text{Fr}V = S$
    Avem $\text{div}\overline{v} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2$
    Atunci $\int\int_S \overline{v}\cdot\overline{N}d\sigma = \int\int\int_V 2dxdydz = 2\int\int_D \left(\int_{\frac{y^2+z^2}{a}} dx\right) dydz =$
    $= 2\int\int_D \left(a - \frac{y^2+z^2}{a}\right) dzdy$,unde $D : y^2 + z^2 \le a^2$
    Deci $\int\int_S \overline{v}\cdot\overline{N}d\sigma = \int_0^a\int_0^{2\pi}\left(a - \frac{\rho^2}{a}\right)\rho d\theta d\rho = \pi a^3$
    Dar,$\int\int_S \overline{v}\cdot\overline{N}d\sigma = \int\int_\Sigma \overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma + \int\int_{\Sigma_1}\overline{v}\cdot\overline{n}_1d\sigma$, unde $\overline{n}_1 = (1,0,0)$ e normala la suprafața Σ_1. Rezultă $\Phi = \int\int_S \overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma = \pi a^3 - \int\int_{\Sigma_1}\overline{v}\cdot\overline{n}_1d\sigma$
    Pe suprafața $\Sigma_1 : x = a, (y,z) \in D, d\sigma = dxdy$. Atunci
    $\int\int_{\Sigma_1}\overline{v}\cdot\overline{n}_1d\sigma = \int\int_{\Sigma_1} 2xd\sigma = \int\int_D 2adzdy = 2a aria(D) = 2\pi a^3 \Longrightarrow$
    $\Longrightarrow \Phi = \int\int_S \overline{v}\cdot\overline{n}d\sigma = \pi a^3 - 2\pi a^3 = -\pi a^3$ □

13. Să se determine fluxul câmpului vectorial $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ prin suprafaţa închisă de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ şi planele $z = 0$ şi $z = = a$, după normala exterioară la suprafaţa.

Soluţie. Fluxul Φ al câmpului vectorial $\overline{v}$ prin suprafaţa închisă Σ este dat de integrala de suprafaţă $\Phi = \int\int_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma$.

Cf. Teoremei 13.2 avem $\Phi = \int\int_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int\int_V \mathrm{div}\overline{v} dxdydz$, unde V este volumul închis de suprafaţa Σ.

$\mathrm{div}\overline{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$

Atunci $\Phi = \int\int\int_V 3dxdydz = 3vol(V) = 3\pi R^2 a$

Calculăm fluxul direct, fără Teorema 13.2. Fie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, unde Σ_1 e baza cilindrului cu normala $\overline{n}_1 = (0, 0, -1)$,$\Sigma_2$ e baza cilindrului cu normala $\overline{n}_2 = (0, 0, 1)$,$\Sigma_3$ e suprafaţa laterală a cilindrului cu normala $\overline{n}_3 = \frac{\mathrm{grad} f}{\|\mathrm{grad} f\|} = \frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{4x^2+4y^2}} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right)$,unde $f = x^2 + y^2 - R^2$

Atunci
$\Phi = \int\int_{\Sigma_1} \overline{v} \cdot \overline{n}_1 d\sigma + \int\int_{\Sigma_2} \overline{v} \cdot \overline{n}_2 d\sigma + \int\int_{\Sigma_3} \overline{v} \cdot \overline{n}_3 d\sigma = \int\int_{\Sigma_1} -zd\sigma +$
$+ \int\int_{\Sigma_2} z + \int\int_{\Sigma_3} \left(x \cdot \frac{x}{R} + y \cdot \frac{y}{R} + z \cdot 0\right) d\sigma = \int\int_{\Sigma_1} 0 + \int\int_{\Sigma_2} a +$
$+ \int\int_{\Sigma_3} \frac{x^2+y^2}{R} = \int\int_{\Sigma_2} a + \int\int_{\Sigma_3} R = a \cdot aria\Sigma_2 + R \cdot aria\Sigma_3 =$
$= a\pi R^2 + R2\pi Ra = 3\pi R^2 a$ □

14. Calculaţi fluxul câmpului vectorial $\overline{v} = x\overline{i} + z^2\overline{j} + y^2\overline{k}$ prin suprafaţa laterală a conului $z^2 = x^2 + y^2$ mărginit de planul $z = 1$, pentru $z \geq 0$.

Soluţie. Pentru a aplica formula lui Gauss-Ostrogradski închidem suprafaţa formată din conul $z^2 = x^2 + y^2$ cu discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$

Avem $\mathrm{div}\overline{v} = 1 \Longrightarrow \Phi = \int\int_{\Sigma} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int\int_{\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1} dxdydz = \frac{\pi}{3}$

Calculăm fluxul lui $\overline{v}$ prin discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$ care mărgineşte conul după normala exterioară . Aplicăm definiţia observând că $\overline{n} = = \overline{k}$ şi $\overline{v} \cdot \overline{n} = y^2$. Deci $\int\int_{z=1,x^2+y^2\leq 1} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int_{z=1,x^2+y^2\leq 1} y^2 d\sigma =$
$= \int\int_{x^2+y^2\leq 1} y^2 dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2\theta d\theta d\rho = \frac{\pi}{4}$

Fluxul cerut va fi diferenţa dintre fluxul lui $\overline{v}$ prin con şi fluxul lui $\overline{v}$ prin discul $z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$,deci $\Phi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ □

15. **(Legea lui Gauss)** Pentru orice $q > 0$, considerăm câmpul scalar

$$f(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi r}$$

şi fie câmpul de gradienţi:

$$\overline{E} = -\text{grad} f.$$

Câmpul scalar f reprezintă potenţialul electric (sau potenţial Newtonian) asociat sarcinei electrice q plasate în O, iar $\overline{E}$ este câmpul electric generat (sau câmp Newtonian).
a. Să se expliciteze $\overline{E}$ şi să se demonstreze că este câmp solenoidal, adică : $\text{div}\overline{E} = 0$.
b. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior este nul.
c. Să se demonstreze că fluxul câmpului $\overline{E}$ prin orice suprafaţă închisă ce conţine originea în interior este q, (legea lui Gauss).

Soluţie. **a.** Putem calcula $\overline{E}$ direct cu definiţia, sau aplicând proprietăţile gradientului; obţinem:

$$\overline{E} = -\text{grad} f = \frac{q}{4\pi}\frac{\overline{r}}{r^3}.$$

Arătăm acum că $\overline{E}$ este solenoidal:

$$\text{div}\overline{E} = -\text{grad}(\text{div} f) = -\Delta f = \frac{q}{4\pi r^6}\left(3r^3 - 3r(x^2 + y^2 + z^2)\right) = 0.$$

b. Fie Σ o suprafaţă închisă ce nu conţine originea în interior. Deoarece câmpul electric $\overline{E}$ este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, sunt îndeplinite ipotezele formulei Gauss-Ostrogradski şi deci, (notăm cu K compactul mărginit de Σ şi cu $\overline{n}$ versorul normalei exterioare la Σ), obţinem:

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_\Sigma \overline{E}\,\overline{n} d\sigma = \int\int\int_K \text{div}\overline{E} dxdydz = 0.$$

c. Fie acum Σ o suprafaţă închisă ce conţine originea în interior. Deoarece $\overline{E}$ nu este de clasă $\mathcal{C}^1$ pe compactul K mărginit de Σ, ($\overline{E}$ nefiind de clasă $\mathcal{C}^1$ în origine), nu putem aplica formula Gauss-Ostrogradski pentru a calcula fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ. Fie $R > 0$ astfel încât sfera de centru O şi rază R (notată în continuare cu S), să fie inclusă în interiorul lui Σ. Fie suprafaţa (închisă) $\Sigma_1 = \Sigma \cup S$, orientată după normala exterioară (deci pe S este normala interioară la sferă). Fie K_1 mulţimea compactă mărginită de Σ_1. Deoarece $O \notin K_1$, fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ_1 este nul (conform (b)). Rezultă că fluxul lui $\overline{E}$ prin Σ este egal cu fluxul lui $\overline{E}$ prin S (orientată după normala exterioară $\overline{n} = \frac{\overline{r}}{R}$ la sferă):

$$\mathcal{F}_\Sigma(\overline{E}) = \int_S \overline{E}\,\overline{n} d\sigma = \frac{q}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = q.$$

$\square$

16. Fie $\overline{v} = yz\overline{i} + 2xz\overline{j} - x^2\overline{k}$.Să se calculeze fluxul lui $\overline{v}$ prin elipsoidul $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 8$ după normala exterioară , precum şi circulaţia lui $\overline{v}$ în lungul curbei C de intersecţie a elipsoidului cu planul $z = 1$, parcursă pozitiv o dată în raport cu Oz.

Soluţie. Cum div$\overline{v} = 0$, rezultă , cf. Teoremei 13.2, că fluxul $\Phi = 0$

Pentru circulaţie putem aplica teorema 13.3, luând ca suprafaţă Σ porţiunea din planul $z = 1$ interioară curbei C.

Avem rot$\overline{v} = -2x\overline{i} + (2x + y)\overline{j} + z\overline{k}$ şi $\overline{n} = \overline{k}$

Atunci $\int_C \overline{v}d\overline{r} = \int\int_\Sigma (\text{rot}\overline{v}) \cdot \overline{n}d\sigma = \int\int_\Sigma d\sigma = aria\Sigma = 2\pi$ (Aria unei elipse de semiaxe a,b este πab şi se poate calcula cu ajutorul integralei curbilinii) □

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii cu ajutorul formulei lui Stokes:

17. $I = \int_C ydx + zdy + xdz$,unde C este cercul $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z =$ $= 0$, parcurs în sens invers sensului de mişcare a acelor de ceasornic, dacă privim din direcţia pozitivă a axei Ox

Soluţie. $I = \int_C ydx + zdy + xdz = \int\int_\Sigma -dydz - dzdx - dxdy =$ $= -\int\int_\Sigma \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}\int\int_\Sigma d\sigma$,deoarece $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sunt cosinuşii directori ai normalei la faţa Σ

Dacă D este interiorul proiecţiei cercului C pe planul xOy, atunci (prin eliminarea lui z între cele două ecuaţii ale lui C) $D : x^2 + xy + y^2 \leq$ $\leq \frac{a^2}{2}, z = 0$

Deci $I = -\sqrt{3}\int\int_D dxdy = -\pi a^2\sqrt{3}$ □

18. $I = \int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, unde C este elipsa obţinută prin intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$, parcursă astfel încât proiecţia curbei C pe planul xOy să fie orientată pozitiv

Soluţie. Avem $\Sigma : z = 1 - z, (x, y) \in D$, unde D este discul din planul xOy mărginit de curba Γ-proiecţia curbei C în acest plan. Integrala se calculează pe faţa superioară a suprafeţei Σ cu normala $\overline{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$

$I = \int\int_\Sigma -2dydz - 2dzdx - 2dxdy = -2\int\int_\Sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\sigma =$ $= -\frac{4}{\sqrt{2}}\int\int_D \sqrt{2}dxdy = -4ariaD = -4\pi$ □

19. Fie Σ emisfera superioară a sferei unitate şi $\overline{v} = z\overline{i} + x\overline{j} + xyz\overline{k}$. Aflaţi fluxul rotorului lui $\overline{v}$ prin Σ orientată după normala exterioară .

Soluţie. Folosind teorema 13.3 avem de calculat circulaţia lui $\overline{v}$ de-a lungul cercului $z = 0, x^2 + y^2 = 1$:

$\int_C \overline{v}d\overline{r} = \int_C zdx + xdy + xyzdz = \int_0^{2\pi} \cos^2 tdt = \pi$

Integrala poate fi calculată direct:

$\text{rot}\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & xyz \end{vmatrix} = xz\overline{i} + (1 - yz)\overline{j} + \overline{k}$ şi observăm că $\overline{n} = \overline{r}$

Deci $\text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n} = x^2 z + y(1 - yz) + z$

$\int\int_\Sigma \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int_\Sigma [x^2 z + y(1 - yz) + z] d\sigma =$
$= \int\int_{x^2+y^2 \le 1} [(x^2 - y^2 + 1)\sqrt{1 - x^2 - y^2} + y] \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} =$
$= \int\int_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 - y^2 + 1) dxdy + \int\int_{x^2+y^2 \le 1} \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = \pi$ (prin trecere la coordonate polare) $\square$

20. Găsiţi circulaţia câmpului vectorial $\overline{v} = y^2\overline{i} + xy\overline{j} + (x^2 + y^2)\overline{k}$ prin conturul format din intersecţia paraboloidului $x^2 + y^2 = Rz$ cu planele $x = 0, y = 0, z = R$ parcurs în sens pozitiv relativ la normala exterioară a paraboloidului.

Soluţie. Direct: $\int_{OAB} \overline{v}d\overline{r} = \int_{\widehat{OA}} \overline{v}d\overline{r} + \int_{\widehat{AB}} \overline{v}d\overline{r} + \int_{\widehat{BO}} \overline{v}d\overline{r}$

Scriem ecuaţiile parametrice ale curbelor:
$\widehat{OA} : x = 0, y = t, z = \frac{t^2}{R}, t \in [0, R]$
$\widehat{AB} : x = R\sin t, y = R\cos t, z = R, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$\widehat{OB} : x = t, y = 0, z = \frac{t^2}{R}, t \in [0, R]$

$\int_{\widehat{OA}} \overline{v}d\overline{r} = \int_{\widehat{OA}} y^2dx + xydy + (x^2 + y^2)dz = \int_0^R t^2 \cdot \frac{2t}{R} dt = \frac{R^3}{2}$

$\int_{\widehat{AB}} \overline{v}d\overline{r} = -\int_0^R t^2 \cdot \frac{2t}{R} dt = -\frac{R^3}{2}$

$\int_{\widehat{AB}} \overline{v}d\overline{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos^3 tdt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2 t \cos tdt$

Pentru calculul integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 tdt$ facem schimbarea $\sin t = \sqrt{u} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1 - \sin^2 t)dt = \int_0^1 (1-u)u^{-\frac{1}{2}} du = B\left(\frac{1}{2}, 2\right) =$
$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(2+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}$

Deducem că $\int_{\widehat{AB}} \overline{v}d\overline{r} = R^3$

Circulaţia este $\int_{OAB} \overline{v}d\overline{r} = R^3 \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = R^3$ Cu teorema 13.3: Curba este porţiunea de paraboloid orientată după normala exterioară

$\int_{OAB} \overline{v}d\overline{r} = \int\int_{z=\frac{1}{R}(x^2+y^2); x^2+y^2 \le R^2, x,y \ge 0} \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma$

Avem $\text{rot}\overline{v} = 2y\overline{i} - 2x\overline{j} - y\overline{k}$

Fie $\varphi = -x^2 - y^2 + Rz$. Normala la suprafaţă este $\overline{n} = \frac{\text{grad}\varphi}{\|\text{grad}\varphi\|} =$
$= \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+R^2}}(-2x, -2y, R)$

$\int\int_{z=\frac{1}{R}(x^2+y^2), x^2+y^2\leq R^2, x,y\geq 0} \text{rot}\overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma =$
$= 3\int\int_{x^2+y^2\leq R^2, x,y\geq 0} \left(-\frac{2x}{R} \cdot 2y + \frac{4xy}{R} - y\right) dxdy =$
$= 3\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\rho^2 \sin\theta d\theta d\rho = R^3$ □

21. Calculaţi circulaţia vectorului $\overline{v} = (x+y)\overline{i} + (y+z)\overline{j} + (z+x)\overline{k}$ de-a lungul elipsei $C : x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$. Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes şi calculând fluxul rotorului lui $\overline{v}$ prin suprafeţele :

a) elipsa C;

b) elipsoidul $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ situat deasupra planului xOy.

Soluţie. Direct vom folosi reprezentarea parametrică a elipsei C : $x = \cos\theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, z = 0$ şi obţinem

$\int_C \overline{v} d\overline{r} = \int_C (x+y)dx + (y+z)dy + (z+x)dz =$
$= \int_0^{2\pi} \left[\left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) \cdot (-\sin\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right] d\theta =$
$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right) d\theta = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes :

a) $\text{rot}\overline{v} = -(\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}), \overline{n} = \overline{k}$

Atunci

$\int\int_\Sigma (\text{rot}\overline{v}) \cdot \overline{n} d\sigma = -\int\int_\Sigma d\sigma = -\int\int_{x^2+2y^2\leq 1} dxdy = -\frac{\pi}{2}$

b) Pentru suprafaţa elipsoidului situată deasupra planului xOy se obţine

$\overline{n} = \frac{x\overline{i}+2y\overline{j}+4z\overline{k}}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}, (\text{rot}\overline{v}) \cdot \overline{n} = -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}, d\sigma = \frac{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}{4z} dxdy$

Atunci

$\int\int_\Sigma (\text{rot}\overline{v}) \cdot \overline{n} d\sigma = \int\int_\Sigma -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}} d\sigma =$
$= \int\int_{x^2+2y^2\leq 1} -\frac{x+2y+4z}{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4y^2+16z^2}}{4z} dxdy =$
$= -\frac{1}{4}\int\int_{x^2+2y^2\leq 1} \frac{x+2y+4z}{z} dxdy =$
$= -\frac{1}{4}\int\int_{x^2+2y^2\leq 1} \frac{x+2y+4\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2-2y^2}}{\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2-2y^2}} dxdy =$
$= -\frac{1}{2}\int\int_{x^2+2y^2\leq 1} \left(\frac{x+2y}{\sqrt{1-x^2-2y^2}} + 2\right) dxdy =$
$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{\rho(\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta)}{\sqrt{1-\rho^2}} + 2\right)\rho d\rho d\theta\right] = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ □

22. Să se calculeze direct şi cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

unde Γ este poligonul de intersecţie dintre cubul $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ şi planul $x + y + z = \frac{3}{2}$.

Soluţie. Γ este un hexagon regulat. Pentru a calcula integrala cu definiţia trebuie parametrizate laturile hexagonului; de exemplu, latura din planul xOy are parametrizarea:

$$x(t) = t, y(t) = \frac{3}{2} - t,\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Calculăm acum integrala aplicând formula lui Stokes. Fie Σ porţiunea din planul $x + y + z = \frac{3}{2}$ situată în interiorul cubului (interiorul hexagonului). Proiecţia lui Σ pe planul xOy este mulţimea

$$D = \{(x,y); \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2},\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},$$

a cărei arie este $\frac{3}{4}$. O parametrizare (carteziană) a suprafeţei Σ este

$$z = \frac{3}{2} - x - y,\ (x,y) \in D.$$

Aplicând formula lui Stokes, obţinem:

$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz =$$

$$= -2\int_\Sigma (x + y)dx \wedge dy + (y + z)dy \wedge dz + (z + x)dz \wedge dx =$$

$$= -2\int\int_D 3dxdy = -6\,\text{aria}(D) = -\frac{9}{2}.$$

□

13.3 Probleme propuse

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Green,următoarele integrale curbilinii :

1. $I = \int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy), (C) : x^2 + y^2 = 1$

   R: $I = \int_C e^{x^2+y^2}(-ydx + xdy) = 2\pi e$

2. $I = \int_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, unde C este curba închisă de parabola $y = x^2$ şi dreapta $y = x$,parcursă în sens direct

   R: $I = -\frac{1}{3}$

3. $I = \int_C (x+y)dx - (x-y)dy, C : x^2 + y^2 = r^2$

   R: $I = -2\pi r^2$

4. $I = \int_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, unde C este triunghiul cu vârfurile $O(0,0)$,
   $A(1,0), B(0,1)$

   R: $I = -1$

   Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Gauss-Ostrogradski, următoarele integrale:

5. $I = \int\int_\Sigma x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, \Sigma$ este faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

   R: $I = 0$

6. $I = \int\int_\Sigma x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy, \Sigma$ este faţa exterioară a suprafeţei închise $x^2 + y^2 = z^2, z = h$

   R: $I = \frac{9\pi}{10} h^5$

7. $I = \int\int_\Sigma xyz(xdydz + ydzdx + zdxdy)$, unde $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 =$
   $= a^2, x, y, z \geq 0$

   R: $I = \frac{a^6}{8}$

   Să se calculeze fluxul $\Phi = \int\int_\Sigma \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma$ cu formula lui Gauss-Ostrogradski:

8. $\overline{v} = -y\overline{i} + x\overline{j}$, unde Σ este cubul unitate

   R: $\Phi = 0$

9. $\overline{v} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, unde Σ este sfera unitate

   R: $\Phi = 0$

10. $\overline{v} = x\overline{i} + 2y\overline{j}$, unde Σ are feţele $x = 0, y = 0, z - 0, x + y + z = 1$

    R: $\Phi = \frac{1}{2}$

11. Să se calculede fluxul câmpului $\overline{v} = (y-z)\overline{i} + (z-x)\overline{j} + (x-y)\overline{k}$ prin suprafaţa deschisă $\Sigma : x^2 + y^2 = 4 - z, z > 0$, direct şi folosind formula Gauss-Ostrogradski, normala făcând unghi ascuţit cu Oz.

    R: $\Phi = 0$

12. Fie $V : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1$ şi $\overline{v} = 3x^2 z\overline{i} + (y^2 - 2x)\overline{j} + z^3\overline{k}$. Să se calculeze $\int\int_{\mathrm{Fr}V} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma$.

    R: $\int\int_{\mathrm{Fr}V} \overline{v} \cdot \overline{n} d\sigma = \frac{216\pi}{5}$

13. Calculaţi fluxul vectorului $\overline{v} = \frac{\overline{r}}{r}$ prin suprafaţa $\Sigma : x^2 + y^2 = z^2, z = h, h > 0$. Să se verifice rezultatul cu formula Gauss-Ostrogradski.

    R: $\Phi = 2\pi h^2(\sqrt{2} - 1)$

14. Calculaţi fluxul vectorului $\overline{v} = \frac{\overline{r}}{r^q}$ prin suprafaţa închisă mărginită de suprafeţele $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0$. Să se verifice rezultatul cu formula Gauss-Ostrogradski.

    R: $\Phi = \frac{\pi}{2}R^{3-q}$

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii cu ajutorul formulei lui Stokes:

15. $I = \int_C ydx + zdy + xdz$, unde $C : x = a\cos^2 t, y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin 2t, z = a\sin^2 t$

    R: $I = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}a^2$ (scriem ecuaţia curbei C eliminând parametrul t şi obţinem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + z = 0$)

16. $I = \int_{ABC}(z - y)dx + (x - z)dy + (y - x)dz$ luată de-a lungul laturilor triunghiului determinat de punctele $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$

    R: $I = ab + bc + ac$

17. Calculaţi circulaţia câmpului vectorial $\overline{v} = y\overline{i} - z\overline{j} + x\overline{k}$ de-a lungul elipsei $y = x, \frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2$, versorul normalei la planul curbei $\overline{n} = \frac{\overline{i}-\overline{j}}{\sqrt{2}}$, folosind formula lui Stokes.

    R: $2\pi a^2$

18. Aflaţi circulaţia câmpului vectorial $\overline{v} = 3z\overline{i} + 2y\overline{k}$ de-a lungul cercului cu centrul în $(1, 2, 3)$ de rază r din planul $x + y + z = 6$ parcurs în sens pozitiv faţă de $\overline{n} = \frac{\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}}{\sqrt{3}}$ folosind formula lui Stokes.

    R: $-\frac{\pi r^2}{\sqrt{3}}$

19. Calculaţi circulaţia vectorului $\overline{v} = y\overline{i} + yz\overline{j} + zx\overline{k}$ de-a lungul cercului $C : x^2 + y^2 = 1, z = 2$. Se va verifica rezultatul aplicând formula lui Stokes şi calculând fluxul rotorului lui $\overline{v}$ ce străbate suprafaţa sferei $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ situate deasupra planului $z = 2$.

    R: $-\pi$

Bibliografie

[1] Angot , A. (1966) *Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică şi din telecomunicaţii* , Ed.Tehnică , Bucureşti.

[2] Bădescu , R. , Maican , C. (1968) *Integrale utilizate în mecanică , fizică tehnică şi calculul lor* , Ed.Tehnică , Bucureşti.

[3] Blăjină , O. A. (2001) *Maple în matematica asistată de calculator* , Ed.Albastră , Cluj-Napoca.

[4] Brînzănescu , V., Stănăşilă , O. (1994) *Matematici speciale* , Ed.ALL, Bucureşti.

[5] Cavailles , J. (1969) *Studii asupra teoriei mulţimilor*, Ed. Ştiinţifică , Bucureşti.

[6] Chiriţă , S. (1989) *Probleme de matematici superioare* , Ed.Did. şi Ped., Bucureşti.

[7] Ciorănescu, N. (1955) *Curs de algebră şi analiză matematică* , Ed.Tehnică , Bucureşti.

[8] Colojoară , I. , Miculescu ,R. , Mortici , C. (2002) *Analiză matematică .Teorie.Metode.Aplicaţii*, Ed.Art , Bucureşti.

[9] Costache , Tania-Luminiţa , Oprişan , Gh. (2004) *Transformări integrale*, Ed.Printech , Bucureşti.

[10] Costache , Tania-Luminiţa , Zamfir , Mariana (2005) *Analiză matematică* , Ed.Printech , Bucureşti.

[11] Costache , Tania-Luminiţa (2006) *Analiză matematică . Noţiuni teoretice. Aplicaţii* , Ed.Printech , Bucureşti.

[12] Cristescu , R. (1967) *Matematici generale* , Ed.Did. şi Ped. , Bucureşti.

[13] Crstici , B. , Bânzaru , T. , Lipovan , O. , Neagu , M. , Neamţu , N., Neuhaus , N. , Rendi , B. , Rendi , D. , Sturz , I. (1981) *Matematici speciale* , Ed.Did. şi Ped. , Bucureşti.

[14] Fihtenholţ , G.M. (1964) *Curs de calcul diferenţial şi integral (vol II-III)*, Ed.Tehnică , Bucureşti.

[15] Filipescu , D. , Grecu , E. , Medinţu , R. (1975) *Matematici generale pentru subingineri.Culegere de probleme* , Ed.Did. şi Ped. , Bucureşti.

[16] Francinou, S., Gianella, H., Nicolas S., (2004) *Exercises de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Analyse 2* , Cassini, Paris.

[17] Găină , S. , Câmpu , E. , Bucur , Gh. (1966) *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral (vol.II-III)* , Ed.Tehnică , Bucureşti.

[18] Gelbaum , B. R. , Olmsted , J.M.H. (1973) *Contraexemple în analiză* , Ed. Ştiinţifică , Bucureşti.

[19] Kaufmann , A. , Precigout , M. (1966) *Elemente de teoria mulţimilor şi algebră modernă* , Ed. Tehnică , Bucureşti.

[20] Lica , D. , Micula , Maria , Căpăţînă , Gh. , Objelean , N. , Marin , I. (2003) *Analiză matematică cu Maple* , Bucureşti.

[21] Luzin , N.N. (1950) *Calculul diferenţial* , Editura de stat.

[22] Năstăsescu , C. (1974) *Introducere în teoria mulţimilor* , Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti.

[23] Niţă , Ana , Stănăşilă , Tatiana (1997) *1000 de probleme rezolvate şi exerciţii fundamentale pentru studenţi şi elevi* , Ed.ALL , Bucureşti.

[24] Olteanu , M. , Morărescu , C. (2003) *Continuitate şi diferenţiabilitate*, Ed.Printech , Bucureşti.

[25] Olteanu , M. , Morărescu , C. (2003) *Serii* , Ed.Printech , Bucureşti.

[26] Olteanu , M. (2004) *Analiză matematică . Noţiuni teoretice şi probleme rezolvate* , Ed.Printech , Bucureşti.

[27] Pavel , Garofiţa , Tomuţa , Floare Ileana , Gavrea , I. (1981) *Matematici speciale* , Ed.Dacia , Cluj-Napoca.

[28] Rimer , D. (1968) *Noţiuni de teoria mulţimilor* , Ed. Didactică şi Pedagogică , Bucureşti.

[29] Scheiber , E. , Lupu , M. (1998) *Matematici speciale.Rezolvarea problemelor asistată de calculator cu exemplificări în Derive, MathCAD, Maple, Mathematica* , Ed.Tehnică , Bucureşti.

[30] Stănăşilă , O. (1981) *Analiză matematică* , Ed.Did. şi Ped. , Bucureşti.

[31] Stuart , R.D. (1971) *Introducere în analiza Fourier cu aplicaţii în tehnică* , Ed.Tehnică , Bucureşti.

[32] Şaichin , A. (1958) *Exerciţii şi probleme de calcul diferenţial* , Ed.Tehnică , Bucureşti.

[33] Tomescu , Rodica , Toma , Antonela , Stanciu , Victoria , Stan , B. *Caiet de seminar Nr. 2 Calcul integral* , Ed.Printech , Bucureşti.

[34] Trandafir , Rodica (1977) *Probleme de matematici pentru ingineri* , Ed.Tehnică , Bucureşti.

[35] Udrişte , C. , Tănăsescu , Elena (1980) *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale* , Ed.Tehnică , Bucureşti.